4.a semana: 12set (resumo)

4.1 Já falamos da *função exponencial*

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad \exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (\neq 0 \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.)$

Temos as seguintes propriedades:

(i) $(\exp z)' = \exp z$

(ii) $\exp(z_1 + z_2) = (\exp z_1)(\exp z_2)$

(iii) $\exp 0 = 1$

(iv) $(\exp z)^{-1} = e \exp(z^{-1})$

(v) $\overline{\exp z} = \exp \bar{z}$

(vi) $|\exp z| = e^{\Re z}$

(vii) exp é periódica de período $2\pi i$.

4.2 $e^{\pi i} = e^0(\cos \pi + i \sin \pi) = -1$ de modo que

$$e^{\pi i} + 1 = 0 \quad \text{(identidade de Euler)}$$

4.3 Às vezes, escreveremos a forma polar

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}.$$

4.4 Um *logaritmo* de um número complexo $z \neq 0$ é um número $w \in \mathbb{C}$ tal que $\exp w = z$. Como exp é periódica, o logaritmo de um número não é único. Escrevendo $z = re^{i\theta}$ e $w = u + iv$ temos

$$u = \ln r, \qquad v = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por convenção, salvo menção em contrário, arg$z$ denotará todos os argumentos de z e $\log z$ denotará todos os logaritmos de z. O argumento de z em $(-\pi, \pi]$, se existir, será chamado de *argumento principal* e denotado com $\mathrm{Arg}(z)$. O logaritmo correspondente será chamado de *logaritmo principal* e denotado com $\mathrm{Log}(z)$. Assim

$$\log(z) = \ln|z| + i\mathrm{arg}(z)$$

e

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z),$$

onde a penúltima equação é uma igualdade entre conjuntos com infinitos valores. Por exemplo,

$$\log 1 = 2k\pi i, \ \mathrm{Log}1 = 0, \ \log(-1) = (2k+1)\pi i, \ \mathrm{Log}(-1) = \pi i,$$

e

$$\log(-1-i\sqrt{3}) = \ln 2 + 2(k-\frac{1}{3})\pi i \ (k \in \mathbb{Z})$$

4.5 Sendo $f(z) = \log z$ o *ramo* do logaritmo tal que $\log z = \ln r + i\theta$ onde $z = re^{i\theta}$ para $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$, usamos as eqs. de C-R em forma polar para ver que log é holomorfa e $(\log z)' = 1/z$. É claro que $\exp(\log z) = z$ mas nem sempre $\log(\exp z) = z$ pois por exemplo tomando $\theta_0 = -\pi$ temos o logaritmo principal e então $\mathrm{Log}(\exp(2\pi i)) = \mathrm{Log} 1 = 0$.

4.6 Escrevendo $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ temos

$$\arg(z_1) = \theta_1 + 2k_1\pi \text{ e } \arg(z_2) = \theta_2 + 2k_2\pi \ (k_1,\, k_2 \in \mathbb{Z}).$$

Como $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, vem que

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Como $k_1 + k_2$ assume todos os valores inteiros, deduzimos que

$$\arg z_1 + \arg z_2 = \arg(z_1 z_2).$$

Logo

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2.$$

Note que esta eq. no entanto pode deixar de valer se fixarmos o ramo do logaritmo. Por exemplo, no caso do ramo principal

$$-\frac{\pi}{2} i = \mathrm{Log}(-i) = \mathrm{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i))$$

mas

$$\mathrm{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)) + \mathrm{Log}(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)) = \frac{3\pi}{4} i + \frac{3\pi}{4} i = \frac{3\pi}{2} i.$$

4.7 É fácil ver que $z^n = e^{n \log z}$ para $z \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Além disso, sendo $z = re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}
\exp(\frac{1}{n}\log z) &= \exp\left(\frac{1}{n}(\ln r + i(\theta + 2k\pi))\right) \\
&= \exp\left(\ln \sqrt[n]{r} + i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \\
&= \sqrt[n]{r} \exp i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

que só assume valores distintos para $k = 0, \ldots, n-1$, e estas são exatamente as raízes n-ésimas de z. Logo

$$z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log z\right)$$

(igualdade entre conjuntos).

Ex. 4.1 Calcular $\exp z$ para $z = -\frac{1}{2}\pi i$, $\frac{3}{4}\pi i$ e $\frac{2}{3}\pi i$.

Ex. 4.2 Mostre que $\exp(iz) = \overline{\exp(i\bar{z})}$ se e somente se $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ex. 4.3 Mostre que $\mathrm{Log}(i^3) \neq 3\mathrm{Log}i$.

Ex. 4.4 Resolver a equação $\log z = i\pi/2$.

Ex. 4.5 Mostre que $\mathrm{Log}z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan(y/x)$ para $z = x + iy$ com $x > 0$.
Ex. 4.6 Verifique que $\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2$ para todos números complexos não-nulos $z - 1$, z_2, onde ambos os membros devem ser interpretados como funções multivalentes.

Ex. 4.7 Prove que a última eq. de (4.7) também vale para n um inteiro negativo.