

### 3.a semana: 29ago (resumo)

**3.1** Chamaremos de *domínio* do plano  $\mathbb{C}$  um subconjunto aberto e conexo de  $\mathbb{C}$ . Salvo menção em contrário, doravante nossas funções estarão definidas num domínio  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$ .

**3.2** Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é dita *holomorfa* em um ponto  $z_0 \in \Omega$  se  $f$  é derivável em todos os pontos de uma bola  $B(z_0, \epsilon)$  inteiramente contida em  $\Omega$  (para algum  $\epsilon > 0$ ).  $f$  é dita *holomorfa* em  $\Omega$  se  $f$  é holomorfa em todos os pontos de  $\Omega$ ; equivalentemente,  $f$  é holomorfa em  $\Omega$  se  $f$  é derivável em todos os pontos de  $\Omega$ . Uma função que é holomorfa em todo  $\mathbb{C}$  é chamada de *inteira*.

**3.3** (*Exemplos de funções holomorfas*) (i)  $f(z) = 1/z$  é holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  
(ii)  $f(z) = |z|^2$  não é holomorfa em nenhum ponto (mas é derivável em 0).  
(iii) Se  $f$  e  $g$  são holomorfas em  $\Omega$ , então  $f + g$  e  $f \cdot g$  também o são. Além disso,  $f/g$  é holomorfa nos pontos  $z_0 \in \Omega$  tais que  $g(z_0) \neq 0$ .  
(iv) Se  $f$  é holomorfa em  $\Omega$  e  $g$  é holomorfa num domínio contendo  $f(\Omega)$ , então  $g \circ f$  é holomorfa em  $\Omega$ .

(v) Polinômios  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  são funções inteiras. O quociente de dois polinômios  $R(z) = P(z)/Q(z)$  é chamado de uma *função racional*. Uma tal função é holomorfa nos pontos em que  $Q(z) \neq 0$ . Por exemplo,  $R(z) = \frac{z^2+3}{(z+1)(z^2+5)}$  é holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\sqrt{5}\}$ .

(vi) A função  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  é chamada de *função exponencial* e denotamos  $f(z) = e^z = \exp z$ . Temos que  $u(x, y) = e^x \cos y$  e  $v(x, y) = e^x \sin y$  são funções de classe  $\mathcal{C}^1$  que satisfazem as equações de C-R em  $\mathbb{C}$  e portanto a função exponencial é uma função inteira. Note que  $f'(z) = u_x + iv_x = f(z)$  para todo  $z$ .

(vii) As equações de C-R em coordenadas polares são

$$\begin{aligned}u_\theta &= -rv_r \\v_\theta &= ru_r.\end{aligned}$$

Como aplicação, seja  $f(z) = \sqrt{r}(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2})$  onde  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  e  $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$  para algum  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  fixado. Então  $u$  e  $v$  são de classe  $\mathcal{C}^1$  e satisfazem as eqs. de C-R como funções de  $r, \theta$ . Segue que  $f$  é holomorfa em  $\mathbb{C}$  menos a semireta  $\theta = \theta_0$  e a origem.

**3.4 Proposição.** Se  $f'(z) = 0$  para todo  $z \in \Omega$  então  $f$  é constante em  $\Omega$ .

*Dem.* De fato  $0 = f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$  implica que  $u$  e  $v$  têm gradiente nulo e portanto todas as derivadas direcionais nulas em  $\Omega$ . Segue que  $u$  e  $v$  são constantes ao longo de qualquer caminho poligonal. Como  $\Omega$  é conexo,  $u, v$  são constantes em  $\Omega$  de onde segue o resultado desejado. q.e.d.

**3.5 Proposição.** Se  $f$  e  $\bar{f}$  são holomorfas em  $\Omega$  então  $f$  é constante.

*Dem.*  $f = u + iv$  e  $\bar{f} = u - iv$ . Das eqs. de C-R deduzimos que  $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ . Logo  $f' = 0$  em  $\Omega$  e o resultado segue de (3.4). q.e.d.

**3.6 Proposição.** Se  $f$  é holomorfa em  $\Omega$  e  $|f|$  é constante então  $f$  é constante.

*Dem.* Suponhamos  $|f(z)| = c \in \mathbb{R}$  para todo  $z$ . Se  $c = 0$  então  $f(z) = 0$  para todo  $z$ . Caso contrário,  $f$  nunca se anula e  $f\bar{f} = |f|^2 = c^2 \neq 0$ , portanto  $\bar{f} = c^2/|f|^2$  é holomorfa. O resultado segue de (3.5). q.e.d.

**3.7** Dizemos que  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é *harmônica* se  $u$  admite derivadas parciais até segunda ordem e  $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$ .  $\Delta$  é chamado de *operador Laplaciano*.

**3.8 Fato.** Se  $f = u + iv$  é holomorfa em  $\Omega$  então  $u$  e  $v$  são funções de classe  $C^\infty$ .

**3.9** Suponhamos que  $f = u + iv$  é holomorfa em  $\Omega$ . Então, usando (3.8) e as eqs. de C-R:

$$\Delta u = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

pela igualdade das derivadas mistas (Teorema de Schwarz). Analogamente  $\Delta v = 0$ . Mostramos que as partes real e imaginária de uma função holomorfa são funções harmônicas; elas são ditas *harmônicas conjugadas*.

**3.10** (i)  $f(z) = 1/z^2 = \bar{z}^2/|z|^4$  é holomorfa em  $z \neq 0$ . Segue que

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^4} \quad \text{e} \quad v(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^4}$$

são funções harmônicas em  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(ii) É imediato que  $u(x, y) = x^2 - y^2$  é harmônica em  $\mathbb{R}^2$ . Calculamos sua harmônica conjugada  $v$  integrando as eqs. de C-R:

$$\begin{aligned} v_x &= -u_y = 2y \\ v_y &= u_x = 2x \end{aligned}$$

Integrando a primeira equação em relação a  $x$  temos  $v(x, y) = 2xy + h(y)$ . Derivando esta equação em relação a  $y$  e comparando com a segunda acima, obtemos  $h'(y) = 0$ . Portanto  $h(y) = c$  (constante real) e  $v(x, y) = 2xy + c$ .

**Ex. 3.1** Determinar os pontos em que  $f$  é derivável e os pontos em que é holomorfa em cada caso: (a)  $f(z) = 2x + ixy^2$ ; (b)  $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \sin y)$ ; (c)  $f(z) = xy + iy$ ; (d)  $f(z) = x^2 + iy^2$ ; (ex)  $f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$ .

**Ex. 3.2** Verificar que as funções seguintes são inteiras: (a)  $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ ; (b)  $f(z) = (z^2 - 2)e^{-ix}e^{-iy}$ .

**Ex. 3.3** Prove que  $f(z) = \ln r + i\theta$  é holomorfa em  $r > 0$ ,  $0 < \theta < 2\pi$  e que  $f'(z) = 1/z$ .

**Ex. 3.4** Prove que se  $f$  é holomorfa e assume apenas valores reais em um domínio  $\Omega$  então  $f$  é constante.

**Ex. 3.5** Determinar a forma mais geral de um polinômio harmônico cúbico  $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ . Exibir seu conjugado harmônico.

**Ex. 3.6** Mostrar que  $u(x, y)$  é harmônica em algum domínio e calcular a sua conjugada harmônica  $v(x, y)$ : (a)  $u(x, y) = 2x(1 - y)$ ; (b)  $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ ; (c)  $u(x, y) = y/(x^2 + y^2)$ .