2.a semana: 22ago (resumo)

2.1 (*Regiões do plano*) A *bola aberta* de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raio $r > 0$ é o conjunto $B(z_0, r)$ formado pelos elementos z de $\mathbb{C}$ que satisfazem $|z - z_0| < r$. Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{C}$. $z_0 \in \mathbb{C}$ é chamado de *ponto interior* de Ω se existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z_0, \epsilon) \subset \Omega$, e é chamado de *ponto exterior* de Ω se ele é um ponto interior do seu complementar, isto é, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z_0, \epsilon) \cap \Omega = \varnothing$. A *fronteira* de Ω é formada por $z \in \mathbb{C}$ que não são nem pontos interiores nem pontos exteriores de Ω. Ω é dito *aberto* se todos seus pontos são interiores, e é dito *fechado* se Ω contém seus pontos de fronteira.[1] Um aberto Ω é dito *conexo* se dois pontos quaisquer de Ω podem ser unidos por um caminho poligonal inteiramente contido em Ω. Ω é dito *limitado* se está contido em alguma bola aberta.

2.2 (*Diferenciabilidade*) Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{C}$, e seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função. Então

$$f = u + iv$$

onde u, $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$u(x, y) = \Re f(z), \quad v(x, y) = \Im f(z)$$

e $z = x + iy$. Os conceitos de limite e continuidade não sofrem modificações pensando em f como uma função de duas variáveis reais a valores em $\mathbb{R}^2$. Em particular, f é contínua se e somente se u, v são contínuas. Por outro lado, dizemos que f é *diferenciável* (ou *derivável*) em z_0 (um ponto interior de Ω) se existe o limite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \tag{1}$$

em cujo caso, o resultado é denotado por $f'(z_0)$. Note que (1) guarda semelhança com o caso de funções de uma variável real, mas em princípio parece diferente do caso de funções de duas variáveis reais. Verificam-se as regras usuais de derivação de somas, produtos e quocientes.

2.3 $f(z) = 1/z$, $z \neq 0$, é diferenciável em todos os pontos, pois

$$\frac{\frac{1}{z+\Delta z} - \frac{1}{z}}{\Delta z} = \frac{-1}{z(z + \Delta z)} \to \frac{-1}{z^2} \quad \text{quando } \Delta z \to 0.$$

Por outro lado, $f(z) = \bar{z}$ não é diferenciável em nenhum ponto, pois

$$\frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

tem limite 1 se Δz se aproxima de 0 por valores reais, mas -1 se a aproximação é feita por números puramente imaginários. Note que neste caso $u(x, y) = x$ e

[1] "Fechado" não é o oposto de "aberto".

$v(x,y) = -y$ admitem derivadas parciais de todas as ordens (e portanto f seria diferenciável vista como função $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$).

2.4 Se $f = u+iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é diferenciável em $z \in \Omega$ então podemos calcular o limite (1) tomando em particular $\Delta z = \Delta x$ ou $\Delta z = i\Delta y$. Concluímos que:

$$f'(z) = u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y) = v_y - iu_y,$$

e chegamos às *equações de Cauchy-Riemann*:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Estas são portanto condições necessárias para diferenciabilidade num ponto e explicam por exemplo o resultado sobre $f(z) = \bar{z}$.

2.5 Teorema. Se u, v são diferenciáveis em (x_0, y_0) (como funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, então $f = u + iv$ é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$ (como função $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$).

Dem. Pela hipótese,

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + E_1 \quad \text{e} \quad \Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + E_2$$

onde

$$\frac{E_1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \to 0, \quad \text{e} \quad \frac{E_2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \to 0, \quad \text{quando } \Delta x,\, \Delta y \to 0.$$

Usando C-R, temos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta u + i\Delta v \\ &= (u_x + iv_x)\Delta z + E_1 + iE_2, \end{aligned}$$

assim

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = (u_x + iv_x) + \frac{E_1 + iE_2}{\Delta z}.$$

Agora

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{\Delta z} &= \frac{E_1}{|\Delta z|^2}\overline{\Delta z} \\ &= \frac{E_1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} - i \frac{E_1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

e analogamente $\frac{E_2}{\Delta z} \to 0$. q.e.d.

2.6 Se u, v tem derivadas parciais contínuas em Ω (i.e. u, v são de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω) então u, v são diferenciáveis em Ω. Deduzimos a seguinte condição suficiente para que $f = u+iv$ seja derivável em Ω: *se* u, v *tem derivadas parciais contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em* Ω, *então* f *é derivável em* Ω.

Ex. 2.1 Quais dos seguintes subconjuntos são abertos? Fechados? Conexos? Limitados?

(a) $|z - 1 + i| \leq 2$;

(b) $|3z - 2| > 3$;

(c) $\Re z = 1$;

(d) $|z - 1| \geq |z|$;

(e) $-\pi < \arg z < \pi$;

(f) $\Re(z^2) > 0$;

(g) $|z| < 3$ e $|z - 1| < 3$;

(h) $|z| < 1$ ou $|z - 2| < 1$.

Ex. 2.2 Determinar o domínio e calcular a parte real $u(x, y)$ e a parte imaginária $v(x, y)$ da função $f(z) = u(z) + iv(z)$ indicada:

(a) $f(z) = z^2$;

(b) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$;

(c) $f(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$.

Ex. 2.3 Mostrar que $\lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$ não existe.

Ex. 2.4 Verificar as equações de Cauchy-Riemann para $f(z) = z^2$ e $f(z) = z^3$.

Ex. 2.5 Provar usando a definição que $f(z) = |z|^2$ é derivável em 0 e não derivável em $z \neq 0$.

Ex. 2.6 Usar 2.6 para deduzir que $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ é derivável em todos os pontos de $\mathbb{C}$.

Ex. 2.7 Determinar todos os pontos em que $f(z) = x^3 + i(1 - y)^3$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann.

Ex. 2.8 Provar que se f é derivável em z_0, então g dada por $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ é derivável em $\bar{z}_0$.