17.a secção: 21nov (resumo)

17.1 Conformalidade. *Seja f uma função holomorfa num domínio Ω, e seja $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Sejam γ_1 e γ_2 curvas regulares (i.e. diferenciáveis com derivada não-nula) em Ω tais que $\gamma_j(t_j) = z_0$ para $j = 1, 2$. Então o ângulo entre $f \circ \gamma_1$ e $f \circ \gamma_2$ é igual ao ângulo entre γ_1 e γ_2.*

Dem. Temos $(f\circ\gamma_j)'(t_j) = f'(z_0)\gamma_j'(t_j)$ implicando $\arg(f\circ\gamma_j)'(t_j) = \arg f'(z_0) + \arg\gamma_j'(t_j)$. Agora $\angle_{z_0}(f\circ\gamma_1, f\circ\gamma_2) = \arg(f\circ\gamma_2)'(t_2) - \arg(f\circ\gamma_1)'(t_1) = \arg\gamma_2'(t_2) - \arg\gamma_1'(t_1) = \angle_{z_0}(\gamma_1, \gamma_2)$. q.e.d.

Vale uma recíproca: se $f = u + iv$ preserva ângulos (orientados) com u, v de classe $\mathcal{C}^1$ então f é holomorfa e $f' \neq 0$.

17.2 Algumas transformações do plano (i) *Translações*: $\tau_\alpha(z) = z + \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) *Rotações*: $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$, onde $\theta \in \mathbb{R}$.

(iii) *Dilatações*: $h_r(z) = rz$, onde $r > 0$.

(iv) Combinando (ii) e (iii) temos $f(z) = \lambda z$, onde $\lambda = re^{i\theta} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

(v) A *inversão* no círculo $C : |z| = 1$ é definida como sendo $I(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$, se $z = re^{i\theta}$. Note que I preserva C e intercambia o interior e o exterior de C. É natural considerar I definida no *plano estendido* $\bar{C} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, e colocar $I(0) = \infty$ e $I(\infty) = 0$.

17.3 *A inversão $I(z) = 1/z$ leva retas e círculos em retas e círculos.*

Dem. Consider o círculo $C : \ |z - z_0| = R$. Elevando ao quadrado ambos os membros e expandindo, $|z|^2 - 2\Re(z_0\bar{z}) = R^2 - |z_0|^2$. Fazendo $w = 1/z$ nesta equação, vem que $1 - 2\Re(z_0 w) = (R^2 - |z-0|^2)|w|^2$.

Agora $|z_0| = R$ quer dizer que C passa por 0; neste caso $\frac{1}{2} = \Re(z_0 w)$, e escrevendo $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = u + iv$ obtemos a reta $x_0 u - y_0 v = \frac{1}{2}$.

Por outro lado, se C não passa por 0, obtemos $|w|^2 - 2\Re\frac{z_0 w}{|z_0|^2 - R^2} = \frac{1}{R^2 - |z_0|^2}$, e esta é a equação do círculo de centro $w_0 = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}$ e raio $S = \frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}$. q.e.d.

17.4 Transformações fracionárias lineares. É uma transformação do plano do tipo

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{1}$$

onde a, b, c, $d \in \mathbb{C}$. Se $c = 0$, T é apenas uma translação. Caso contrário, vemos que T não é constante se e somente se $ad - bc \neq 0$; assumamos isto. Então podemos escrever tal T na forma

$$T(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\frac{1}{cz + d},$$

o que mostra que $w = T(z)$ é a composição de $\xi = cz + d$, $\eta = 1/\xi$, $\zeta = \frac{bc-ad}{c}\eta$, e $w = \frac{a}{c} + \zeta$, ou seja, translações, rotações, dilatações e a inversão $I(z) = 1/z$.

Como todas estas transformações levam retas e círculos em retas e círculos, também uma transformações fracionárias linear leva retas e círculos em retas e círculos.

17.5 Estrutura de grupo. A transformação (1) T pode ser representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Se $\tilde{T}$ é outra transformação fracionária linear, representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

então a composta $\tilde{T} \circ T$ também é uma transformação fracionária linear, e está representada pelo produto das matrizes (2) e (3), como pode ser facilmente verificado. Note também que $ad - bc$ é o determinante de (2); se ele é não-nulo, a matriz (2) é invertível, e sua inversa é a transformação fracionária linear representada pela matriz inversa de (2).

Ex. 17.1 Mostrar que a fórmula

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

define uma transformação fracionária linear que leva três pontos dados z_1, z_2, z_3 em três pontos dados w_1, w_2, w_3.

Ex. 17.2 Um *ponto fixo* de uma transformação T é um ponto z_0 com $T(z_0) = z_0$. Mostrar que uma transformação fracionária linear T que não é a identidade tem no máximo dois pontos fixos no plano estendido.

Ex. 17.3 Mostrar que a única transformação fracionária linear que leva três pontos dados z_1, z_2, z_3 em três pontos dados w_1, w_2, w_3 é a dada no enunciado do Ex. 17.1. (Sugestão: Se T e S são duas transformações fracionárias lineares que levam z_1, z_2, z_3 em w_1, w_2, w_3, considere $S^{-1} \circ T$ e use o Ex. 17.2.)

Ex. 17.4 Determinar transformação fracionária linear que leva 2, i, -2 em 1, i, -1.

Ex. 17.5 Mostrar que

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\Im z_0 > 0$ é uma transformação fracionária linear que leva o semi-plano superior $\Im z \geq 0$ bijetivamente sobre o disco unitário $|w| \leq 1$.