16.a aula: 7nov (resumo)

16.1 Integrais trigonométricas racionais. Vamos aplicar o teorema dos resíduos de Cauchy ao cálculo de algumas integrais reais. A primeira classe consiste de integrais do tipo

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

onde R é uma função racional real (o quociente de dois polinômios reais). Por exemplo, calculemos

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$$

Lembremos que $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ e façamos a substituição $z = e^{ix}$. Então $dz = iz\, dx$ e

$$I = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1}.$$

Fatorando $z + 4z + 1 = (z-a)(z-b)$ onde $a = -2+\sqrt{3}$ e $b = -2-\sqrt{3}$, vemos que o integrando tem dois pólos simples em $z = a$ e $z = b$ e apenas o primeiro se situa no interior do círculo $|z| = 1$. Segue que

$$I = \frac{2}{i}\, 2\pi i \operatorname{Res}_a = 4\pi \frac{1}{z-b}\Big|_{z=a} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

16.2 Integrais racionais reais. A segunda classe de consiste de integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx$$

onde $R(x) = P(x)/Q(x)$ e P e Q são polinômios reais onde Q não tem zeros reais e $\deg Q \geq \deg P + 2$. Por exemplo, calculemos

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4+5x^2+6} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4+5x^2+6}$$

Seja C_R a curva formada pelo segmento $[-R, R]$ seguido do semi-círculo W_R : $z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ e seja

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+5z^2+6} = \frac{z^2}{(z^2+2)(z^2+3)}.$$

Os pontos singulares de f são $\pm i\sqrt{2}$ e $\pm i\sqrt{3}$. Para R suficientemente grande,

$$\int_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{i\sqrt{2}}(f) + \operatorname{Res}_{i\sqrt{3}}(f)\right). \tag{1}$$

Por outro lado,

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{W_R} f(z)\,dz$$

onde

$$\left|\int_{W_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_{W_R} \frac{|z|^2}{|z^4+5z^2+6|}\,|dz| \leq \frac{R^2}{R^4-5R^2-6}\pi R \to 0$$

quando $R \to \infty$. Para $z_0 = i\sqrt{2}$ temos

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \frac{z_0^2}{2z_0(z_0^2+3)} = i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Analogamente, $\mathrm{Res}_{i\sqrt{3}}(f) = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Fazendo $R \to \infty$ em (4), segue que

$$I = \pi i\left(i\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

16.3 Como $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$ se $y \geq 0$, o mesmo método de (16.2) pode ser aplicado ao cálculo de integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\,dx.$$

Por exemplo, calculemos

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2+1} = \Re\int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{x^2+1}.$$

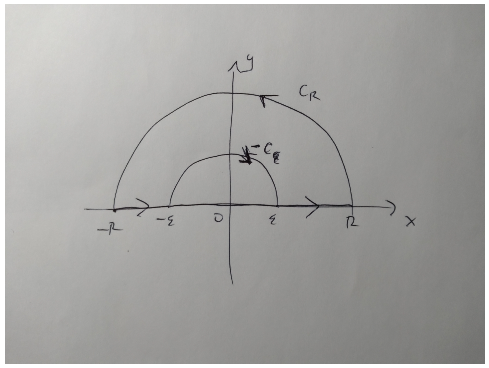
Seja $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$. O único ponto singular de f no semi-plano superior é i e assim

$$I = 2\pi i\mathrm{Res}_i(f) = 2\pi i\lim_{z\to i}(z-i)f(z) = 2\pi i\frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Ex. 16.4 Caminhos indentados. Vamos modificar o método de (16.3) para mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

A ideia é integrar e^{iz}/z ao longo do caminho $C_R + [-R,-\epsilon] - C_\epsilon + [\epsilon, R]$ (o semi-círculo C_ϵ é introduzido aqui para evitarmos passar por sobre a singularidade $z=0$ de e^{iz}/z):



O teorema de Cauchy-Goursat nos diz que

$$\int_{[\epsilon,R]} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{[-R,-\epsilon]} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0,$$

ou

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -2i\int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{2}$$

Por um lado, usando a parametrização $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, temos

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = i\int_0^\pi \exp(iRe^{i\theta})\,d\theta,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| &\leq \int_0^\pi e^{-R\theta}\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\theta}\,d\theta \\
&< 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\frac{2\theta}{\pi}}\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}) \\
&< \frac{\pi}{R} \to 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

quando $R \to \infty$.

Por outro lado, escrevendo a série de Laurent de e^{iz}/z obtemos que

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + g(z)$$

onde $g(z)$ é uma função analítica em 0, assim limitada numa vizinhança de 0, $|g(z)| < M$ para $|z| = \epsilon$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Portanto

$$\int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} = \int_{C_\epsilon} \frac{1}{z}\,dz + \int_{C_\epsilon} g(z)\,dz, \tag{4}$$

onde

$$\left| \int_{C_\epsilon} g(z)\, dz \right| \leq M\pi\epsilon \to 0 \tag{5}$$

quando $\epsilon \to 0$, e

$$\int_{C_\epsilon} \frac{1}{z}\, dz = \pi i. \tag{6}$$

O resultado desejado segue de (2), (3), (4), (5) e (6).

Ex. 16.1 Calcular as integrais: (a) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\, dx}{5+4\cos x}$; (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Ex. 16.2 Calcular as integrais: (a) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$; (b) $\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{x^6+1}$; (c) $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\, dx}{x^2+1} \quad (a \geq 0)$; (d) $\int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{(x^2+1)^2}$.

Ex. 16.3 Mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}(b-a)$$

para a, $b \geq 0$. Deduzir que

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$