15.a secção: 2nov (resumo)

15.1 Tipos de singularidades isoladas. As singularidades isoladas se classificam em três tipos, de acordo com a expansão de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$:

(i) *removível* se a série de Laurent não tem potências negativas, $a_n = 0$ para todo n negativo. Neste caso, f pode ser extendida a uma função holomorfa no disco pondo $f(z_0) = a_0$. Por ex., $\frac{\sin z}{z}$ e $z_0 = 0$.

(ii) *polares* se a série de Laurent tem um número não-nulo finito de potências negativas, $a_{-m} \neq 0$ mas $a_n = 0$ para $n < -m$ onde m é um inteiro positivo. Neste caso dizemos que z_0 é um pólo de ordem m de f. Note que então $(z-z_0)^m f(z)$ tem uma singularidade removível em z_0 e que $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$. Por ex., $1/z^m$ e $z_0 = 0$.

(iii) *essencial* se a série de Laurent tem infinitas potências negativas, $a_n \neq 0$ para infinitos índices n negativo. Por ex., $e^{1/z}$ e $z_0 = 0$.

15.3 Resíduo num polo. *Uma singularidade isolada z_0 de uma função f é um pólo de ordem m de se e somente se f pode ser escrita na forma*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} \tag{1}$$

onde φ é holomorfa em z_0 e $\varphi(z_0) \neq 0$. Além disso

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \varphi(z_0) \qquad \text{se } m = 1$$

e

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \qquad \text{se } m \geq 2.$$

Dem. Suponhamos que f tem a forma (1). Como φ é holomorfa em z_0, ela é analítica em z_0. Escrevendo a série de Taylor de φ em z_0 e subsitutindo em (1), obtemos a expressão desejada para o resíduo.

Reciprocamente, se f tem um pólo de ordem m em z_0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m},$$

com $b_m \neq 0$ em $0 < |z-z_0| < \epsilon$, a função φ definida por

$$\varphi(z) = \begin{cases} (z-z_0)^m f(z) & \text{se } z \neq z_0, \\ b_m & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

tem série de Taylor em z_0 dada por

$$\varphi(z) = b_m + \cdots + b_1(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

em $|z-z_0|<\epsilon$, sendo assim analítica e portanto holomorfa em z_0, como desejado q.e.d.

15.4 *(Exemplos)* (i) $f(z)=\frac{z+1}{z^2+9}$ tem um ponto singular em $z_0=3i$ e $f(z)=\varphi(z)/(z-3i)$ onde $\varphi(z)=(z+1)/(z+3i)$. Como φ é holomorfa em $3i$ e $\varphi(3i)\neq 0$, segue the $\text{Res}_{3i}(f)=\varphi(3i)=(3-i)/6$.

(ii) $f(z)=\frac{z^3+2z}{(z-i)^3}$ tem um ponto singular em $z_0=i$ e $f(z)=\varphi(z)/(z-i)^3$ onde $\varphi(z)=z^3+2z$. Como φ é inteira e $\varphi(i)=i\neq 0$, segue the $\text{Res}_{3i}(f)=\varphi''(i)/2!=3i$.

(iii) Consideremos $f(z)=\frac{(\log z)^3}{z^2+1}$ onde usamos $\arg(z)\in(0,2\pi)$. Então f tem um ponto singular em $z_0=i$ e $f(z)=\varphi(z)/(z-i)$ onde $\varphi(z)=(\log z)^3/(z+i)$. Como φ é holomorfa em i e $\varphi(i)=-\pi^3/16\neq 0$, segue the $\text{Res}_{3i}(f)=\varphi 3i)=-\pi^3/16$.

15.5 Zeros de funções holomorfas. Suponhamos que f é holomorfa numa bola B centrada em $z_0\in\mathbb{C}$ e $f(z_0)=0$. Então f é analítica em z_0 e alguma derivada $f^(m)(z_0)\neq 0$, a não ser que f seja identicamente nula em B. Dizemos que f é um zero de ordem (ou multiplicidade) m se $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ para $n=0,\ldots,m-1$ e $f^{(m)}(z_0)\neq 0$. Neste caso a série de Taylor f em z_0 se escreve $f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ onde $a_m\neq 0$. Podemos então escrever $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$ onde a função g dada por

$$g(z)=\begin{cases}(z-z_0)^{-m} & \text{se } z\in B\setminus\{z_0\}\\ a_m & \text{se } z=z_0,\end{cases}$$

é holomorfa em B. Por continuidade, g não se anula numa vizinhança de z_0 e portanto z_0 é uma zero isolado de f. Mostramos que *os zeros de uma função holomorfa não nula definida numa bola são isolados.*

15.6 Princípio da Identidade. *Sejam f, g funções holomorfas numa bola aberta B centrada em z_0. Suponhamos que $f(z)=g(z)$ para todo z pertencente a um subconjunto A de B que se acumula em z_0. Então $f=g$ em B.*

Dem. Dizer que z_0 é um ponto de acumulação de A significa dizer que existe uma seqüência $z_n\in A$ tal que $z_n\to z_0$. Então $f-g$ é uma função holomorfa que se anula em z_n e portanto em z_0 por continuidade. Como z_0 não é um zero isolado de $f-g$, temos que $f-g$ é identicamente nula em B. q.e.d.

Ex. 15.1 Localizar e classificar as singularidades isoladas das funções dadas: (a) $\frac{z+1}{z^2-2z}$; (b) $\frac{z^4}{(z^4+16)^2}$; (c) $\frac{1}{\sin^2 z}$; (d) $\sin\frac{1}{z}$; (e) $\frac{1-\cosh z}{z^3}$; (f) $\frac{\exp(2z)}{(z-1)^2}$;

Ex. 15.2 Seja z_0 uma singularidade isolada de f. Mostre que se f é limitada numa vizinhança de z_0, então z_0 é uma singulariade removível.

Ex. 15.3 Seja z_0 uma singularidade isolada de f. Mostre que se $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$ então z_0 é um pólo de f.

Ex. 15.4 Calcular o resíduo em 0 da função indicada: (a) $\frac{1}{z+z^2}$; (b) $z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$; (c) $\frac{z-\sin z}{z}$; (d) $\frac{\cot z}{z^4}$ (e) $\frac{\sinh z}{z^4(1-z^2)}$; (f) $\frac{1}{z(e^z-1)}$.

Ex. 15.5 Calcular os resíduos indicados: (a) $\mathrm{Res}_{-1}\frac{z^{1/4}}{z+1}$ onde $\arg(z) \in (0, 2\pi)$; (b) $\mathrm{Res}_i \frac{\mathrm{Log} z}{(z^2+1)^2}$; (c) $\mathrm{Res}_i \frac{z^{1/2}}{(z^2+1)^2}$ onde $\arg(z) \in (0, 2\pi)$.

Ex. 15.6 Calcular o valor da integral

$$\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz$$

onde: (a) $|z-2| = 2$; (b) $|z| = 4$.

Ex. 15.7 Sejam f e g funções holomorfas em z_0 e assumamos que g tem um zero simples (ordem um) em z_0 e que f não se anula em z_0. Prove que f/g tem um pólo simples em z_0 e

$$\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Ex. 15.8 Mostrar que

$$\int_C \frac{dz}{(z^2-1)^2+3} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

onde C é a fronteira do retângulo delimitado pelas retas $x = \pm 2$, $y = 0$ e $y = 1$, orientado no sentido anti-horário.

Ex. 15.9 Prove que não existe função holomorfa no disco unitário tal que $f(\frac{1}{n}) = 2^{-n}$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.