14.a secção: 31out (resumo)

14.1 Singularidades isoladas. Se f não é holomorfa em z_0, mas é holomorfa em algum ponto de qualquer bola aberta centrada em z_0, dizemos que z_0 é uma *singularidade* ou *ponto singular* de f. Se f é holomorfa num disco pefurado $0 < |z - z_0| < R$, dizemos que z_0 é uma *singularidade isolada* de f. Por exemplo, $1/\sin(\pi/z)$ tem os pontos singulares $z = 0$ e $z = 1/n$ para $n = \pm 1$, $\pm 2, \ldots$; todos esses pontos singulares são isolados, exceto $z = 0$.

14.2 Resíduos. Seja f uma função holomorfa no disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$. O *resíduo* de f em z_0 é o número complexo

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$$

onde C é qualquer curva fechada simples contida no disco perfurado e que contém z_0 no seu interior. Notemos que

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = a_{-1}$$

onde a_{-1} é o coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ na expansão de Laurent de f centrada em z_0.

14.3 Exemplos (i) $\int_C \frac{e^z-1}{z^4}\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}_0 \left(\frac{e^z-1}{z^4}\right) = 2\pi i \mathrm{Res}_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n!}\right) = 2\pi i \frac{1}{3!} = \frac{\pi i}{3}$.

(ii) $\int_C \cosh\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 2\pi i \mathrm{Res}_0 \cosh\left(\frac{1}{z^2}\right) = 2\pi i \mathrm{Res}_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-2n}}{(2n)!}\right) = 0$.

(iii) Como $\frac{1}{z(z-2)^5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^{n-5}$ para $0 < |z-2| < 2$, temos $\int_{|z-2|=1} \frac{dz}{z(z-2)^5} = 2\pi i \mathrm{Res}_2 \left(\frac{1}{z(z-2)^5}\right) = 2\pi i \frac{1}{32} = \frac{\pi}{16}$.

14.4 Teorema dos Resíduos de Cauchy. *Seja f uma função holomorfa sobre uma curva fechada simples C e sobre seu interior, exceto um número de pontos singulares $z_1, \ldots, z_n$ no interior de C. Então*

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_k}(f).$$

Dem. Sejam C_k pequenos círculos centrados em z_k, contidos no interior de C, disjuntos dois a dois. Pelo teorema de Cauchy para domínios simplesmente conexos (8.9),

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_k}(f),$$

q.e.d.

14.5_(Exemplos)_ (i) $\int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}_0 = -\frac{\pi i}{3}$, pois

$$z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{-2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (0 < |z| < \infty).$$

(ii) $\int_{|z|=2} \frac{4z-5}{z(z-1)}\, dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_0 + \mathrm{Res}_1\right) = 2\pi i (5+(-1)) = 8\pi i$, pois $\frac{4z-5}{z(z-1)} = \frac{5}{z} - \frac{1}{z-1}$.

Ex. 14.1 Calcular o resíduo em 0 da função indicada: (a) $\frac{1}{z+z^2}$; (b) $\frac{e^z}{z^3}$; (c) $z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$; (d) $\frac{z-\sin z}{z}$; (e) $\frac{\cot z}{z^4}$ (f) $\frac{\sinh z}{z^4(1-z^2)}$.

Ex. 14.2 Usar o teorema dos resíduos de Cauchy para calcular $\int_{|z|=3} f(z)\, dz$, onde f é a função indicada: (a) $\frac{e^{-z}}{z^2}$; (b) $\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$; (c) $z^2 e^{1/z}$; (d) $\frac{z+1}{z^2-2z}$.