13.a secção: 27out (resumo)

13.1 *(Exemplos)* (i) Vimos que $\frac{1}{1-z}$ é representado no disco $|z|<1$ por $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Trocando z por $1/z$, vemos que $\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ em $|z|>1$.

(ii) Temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1-z} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\end{aligned}$$

no anel $1<|z|<2$.

(iii) Analogamente vê-se que

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}-1}{z^n}$$

para $2<|z|<\infty$.

13.2 Séries de Laurent Uma série da forma

$$b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n} + \cdots \tag{1}$$

pode ser considerada uma série de potências usual na variável $1/z$. Ela portanto converge no exterior de um círculo. Combinando (1) com uma série de potências usual, obtemos uma série do tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n,$$

chamada de *série de Laurent*. Ela é dita convergente quando as partes consistindo de potências positivas e potências negativas são separadamente convergentes. Desta forma, a região de convergência de uma tal série é uma anel da forma $R_1<|z|<R_2$.

13.3 Teorema de Laurent *Seja f holomorfa em um anel $R_1<|z-z_0|<R_2$ (onde $R_1\in[0,\infty)$ e $R_2\in(0,\infty]$). Então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

para $R_1<|z-z_0|<R_2$, onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad (n=0,\,1,\,2,\ldots)$$

e

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\,dz \qquad (n = 1,\, 2, \ldots),$$

e C é uma curva simples fechada orientada no sentido anti-horário e que contém z_0 no seu interior.

13.4 *(Exemplos)* (i) Começando com a série de Taylor $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $(|z| < \infty)$ e trocando z por $1/z$, obtemos

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \cdots \qquad (0 < |z| < \infty).$$

Do teorema de Laurent (15.3) segue que

$$1 = b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{1/z}\,dz$$

onde C é uma curva simples fechada orientada no sentido anti-horário e que contém 0 no seu interior.

(ii) A função $f(z) = 1/(z-i)^2$ já está na forma de uma série de Laurent (com um único termo não-nulo). Segue que

$$\int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq 2, \\ 2\pi i, & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Ex. 13.1 Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $0 < |\alpha| < |\beta|$. Determinar uma série em potências positivas e negativas de z que representa $\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ nas seguintes regiões: (i) $|\alpha| < |z| < |\beta|$; (ii) $|z| < |\alpha|$; (iii) $|\beta| < |z|$.

Ex. 13.2 Mostrar que

$$\int_{\partial B(z_0, r)} \frac{1}{(z-z_0)^k}\,dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } k = 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

usando o teorema de Laurent.

Ex. 13.3 Representar a função

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

por uma série de Laurent na região $0 < |z| < \infty$.

Ex. 13.4 Representar a função

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$$

por uma série de Laurent na região $0 < |z| < 1$ e em $1 < |z| < \infty$.