11.a secção: 17out (resumo)

11.1 Seqüências infinitas. Dada uma seqüência $c_0,\ c_1,\ c_2,\ldots$ de números complexos, dizemos que ela converge para $c \in \mathbb{C}$ se dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$|c_n - c| < \epsilon \quad \text{para } n \geq n_0$$

e escrevemos $\lim_{n\to\infty} c_n = c$. Uma seqüência pode ter no máximo um limite. Se $c_n = a_n + ib_n$ e $c = a + ib$, então $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ se e somente se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Por exemplo, $c_n = -1 + i\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge para -1.

Também dizemos que a sequencia $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge para ∞ se dado $M > 0$ existe n_0 tal que

$$|c_n| > M \quad \text{para } n \geq n_0$$

e escrevemos $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$.

11.2 Séries infinitas. Dada uma seqüência $c_0,\ c_1,\ c_2,\ldots$ de números complexos, dizemos que a série infinita $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge se $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k$ existe e é finito. Neste caso, $s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k$ é a soma da série, denotada também por $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$. O número c_n é dito o n-ésimo termo da série e $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_n$ é dita a n-ésima soma parcial. Uma série que não converge é dita divergente.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ é convergente então necessariamente $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ (condição do termo geral). De fato $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$. Por exemplo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ é divergente, pois $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Se $c \in \mathbb{C}$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ diverge se $|c| \geq 1$, pela condição do termo geral, e converge para $\frac{1}{1-c}$ se $|c| < 1$, usando a identidade

$$\frac{1}{1-c} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} + \frac{c^n}{1-c}.$$

Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge então $|\sum_{n=0}^{\infty} c_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$.

Se $c_n = a_n + ib_n$ onde $a_n,\ b_n \in \mathbb{R}$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge para s se e somente as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergem para $\Re s$ e $\Im s$.

11.3 Critério de comparação para séries reais com termos não-negativos. Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ séries com termos reais tais que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n. Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ também o é. De fato sendo $t = \sum_{k=0}^{\infty} b_n$, temos $\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_n \leq t$, de modo que $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ é uma seqüência de números reais crescente e limitada superiormente que portanto tem um supremo, que é o limite da seqüência.

Por exemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ é majorada termo a termo pela série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$ e portanto é convergente.

11.4 Convergência absoluta. A série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ é dita absolutamente convergente se a série $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ é convergente. Vamos provar que se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ é absolutamente convergente então ela é convergente. De fato sendo $c_k = a_k + ib_k$ temos $|a_k| \leq |c_k|$ e $|b_k| \leq |c_k|$ para todo n. Como $\sum_{k=0}^{\infty} |c_n|$ é convergente e $0 \leq |a_n| \leq |c_n|$ para todo n, por (11.3) vem que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$ é convergente. Agora $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ para todo n, e novamente (11.3) diz que $\sum_{n=0}^{n}(a_n + |a_n|)$ é convergente. Segue que $\sum_{k=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{n} ((a_n + |a_n|) - |a_n|) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$ é convergente. Analogamente $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ é convergente e segue da última afirmação de (11.2) que $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ é convergente.

11.5 Série de potências. Uma série de potências é da forma

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{1}$$

onde a_n são coeficientes complexos e z é uma variável complexa. Mais geralmente pode-se também considerar séries de potências da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Já vimos que a série geométrica

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

é uma série convergente para $1/(1-z)$ para $|z| < 1$; dizemos que ela representa a função $f(z) = 1/(1-z)$ na bola aberta $|z| < 1$. A mesma função é representada pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z+1)^n$$

na bola aberta de raio maior $|z + 1| < 2$. De fato

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2} \right)^n.$$

11.6 Desenvolvimento de funções holomorfas em séries de potências. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em um ponto $z_0 \in \Omega$. Então existe $r > 0$ tal que para todo $z \in B(z_0, r)$ vale*

$$\begin{aligned} f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots, \end{aligned}$$

isto é,

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

Dem. Seja C um círculo centrado em z_0 e contido em Ω, e seja r seu raio. Pela fórmula integral de Cauchy, podemos escrever

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \\
&= \frac{1}{\xi - z_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^{n-1} + \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \right),
\end{aligned}$$

e assim,

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} + (z - z_0) \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} + \cdots + (z - z_0)^{n-1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^n} + (z - z_0)^n \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)^n}.$$

Dividindo por $2\pi i$ e integrando ao longo de C ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned}
f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots \\
+ \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z - z_0)^{n-1} + R_n
\end{aligned}$$

onde

$$R_n = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)(\xi - z_0)^n}$$

Sejam $M = \max_C |f|$ e $s = |z - z_0| < r$. Então:

$$|R_n| \leq \frac{s^n}{2\pi} \frac{2\pi r M}{(r - s) r^n} = \frac{rM}{r - s} \left(\frac{s}{r} \right)^n.$$

Como $r/s < 1$, temos $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$. q.e.d.

11.7 Observações e exemplos. O raio de convergência da séries de Taylor obtida em (11.6) é pelo menos a menor distância de z_0 à fronteira de Ω. O raio pode ser maior, mas não há garantias que ela representará a função f nos pontos comuns a Ω e ao disco de convergência. Uma função representável por uma série de potências numa bola aberta (de raio positivo) centrada num ponto z_0 é dita *analítica* em z_0. Mostramos acima que uma função holomorfa num ponto é analítica nesse ponto. A recíproca também vale, e será vista numa aula futura.

Calculando as derivadas, obtemos:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Tratam-se aqui de funções inteiras, convergem pois as séries para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ex. 11.1 Prove que uma seqüência convergente é limitada (Uma seqüência $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ é dita limitada se existe $R > 0$ tal que $|c_n| < R$ para todo n.)

Ex. 11.2 Mostre que se $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ então $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$. (Sugestão: Usar a desigualdade $||z_n| - |z|| \leq |z_n - z|$.)

Ex. 11.3 Determinar a série de potências que representa a função $1/z$ em torno de um ponto $z_0 \neq 0$ dado. Qual é o raio da maior bola aberta centrada em z_0 onde a série é convergente?

Ex. 11.4 Determinar a série de potências que representa a função z em torno de um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ dado. Qual é o raio da maior bola centrada em z_0 onde a série é convergente? Repetir o exercício para z^2. Você consegue generalizar o resultado para z^k, k um inteiro positivo?

Ex. 11.5 Expandir $\frac{2z+3}{z+1}$ em potências de $z - 1$. Qual é o raio de convergência?

Ex. 11.6 Mostre que

$$\frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \cdots$$

para $0 < |z| < 1$. (Sugestão: $\frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^3}\left(2 - \frac{1}{1+z^2}\right)$.)