10.a secção: 13out (resumo)

10.1 Derivadas de funções holomorfas Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e C um círculo contido em Ω. Para todo z_0 no interior de C, temos pela fórmula integral de Cauchy que

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Daqui vamos obter uma fórmula para $f'(z_0)$. Temos

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}.$$

A diferença entre esta integral e

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$$

é da forma

$$\Delta z \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^2 (z - z_0 - \Delta z)}.$$

Sejam M o valor máximo de $|f|$ sobre C, L o comprimento de C e d a distância mínima de C a z_0. Sendo $|\Delta z| < d$, o valor absoluto da última expressão está acotado superiormente por

$$\frac{M \cdot L|\Delta z|}{d^2(d - |\Delta z|)},$$

que tende a zero com $\Delta z \to 0$. Consequentemente,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^2}.$$

10.2 Derivadas de ordem superior. Repetindo o tipo de argumento acima, obtemos que

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^3},$$

e mais geralmente,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

10.3 Suponhamos que f é uma função holomorfa em um ponto z_0. Isto quer dizer que f é derivável num conjunto aberto contendo z_0. Tomando um círculo centrado em z_0 de raio suficientemente pequeno contido nesse aberto, podemos aplicar (10.2) para concluir que f *admite derivadas de todas as ordens em* z_0. Escrevendo $f = u + iv$, concluímos que u *e* v *são funções de classe* C^∞ *numa vizinhança de* z_0.

10.4 (*Exemplo*) $\int_{\partial B(0,1)} \frac{e^{2z}\,dz}{z^4} = \int_{\partial B(0,1)} \frac{f(z)\,dz}{(z-0)^{3+1}} = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = \frac{8\pi i}{3}$.

10.5 Teorema de Morera. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua tal que $\int_C f(z)\,dz = 0$ para toda curva fechada C em Ω. Então f é holomorfa em Ω.*

Dem. Por (7.2) e (7.3), f admite primitiva F em Ω, $F' = f$. Como F é holomorfa, segue de (10.3) que f também é holomorfa. q.e.d.

10.6 Desigualdade de Cauchy. Nas hipóteses de (10.1), sendo M o valor máximo de $|f|$ sobre C e r o raio de C, temos:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

10.7 Teorema de Liouville. *Toda função inteira e limitada é constante.*

Dem. Seja f inteira com $|f| \leq M$ para uma constante $M > 0$. Por (10.7), temos

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$$

para todos $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Segue que f' é identicamenete nula e assim f é constante. q.e.d.

10.8 Teorema Fundamental da Álgebra. *Todo polinômio complexo não-constante tem pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$.*

Dem. Suponhamos por absurdo que $P(z)$ é um polinômio que nunca se anula. Então $f(z) = 1/P(z)$ é uma função inteira. Como $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$, verifica-se que f é limitada, logo, constante por (10.8) e P também é constante. q.e.d.

Ex. 10.1 Calcular as seguintes integrais onde C é a fronteira do quadrado cujos lados estão sobre as retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$, orientado no sentido anti-horário: (a) $\int_C \frac{e^{-z}}{z-\pi i/2}\,dz$; (b) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz$; (c) $\int_C \frac{z}{2z+1}\,dz$; (d) $\int_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2}\,dz$ ($|x_0| < 2$); (e) $\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\,dz$.

Ex. 10.2 Calcular: (a) $\int_C \frac{\cos(z^2+3z-1)}{(2z+3)^2}\,dz$, onde C é o círculo $|z| = 3$ orientado no sentido anti-horário; (b) $\int_C \frac{z^2}{(2z-i)^3}\,dz$, onde C é o círculo $|z| = 1$ orientado no sentido anti-horário; (c) $\int_C \frac{\log(z^2+2)}{(3z-2)^2}\,dz$, onde C é o círculo $|z| = 1$ orientado no sentido anti-horário.

Ex. 10.3 Mostre que se f é inteira e $|f(z)| < |z|^n$ para algum inteiro positivo n e todo $|z|$ suficientemente grande, então f é um polinômio.