1.a semana: 16ago (resumo)

1.1 A equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução se x é um número real. Assim estendemos **R** a um conjunto maior da seguinte forma. Números complexos são expressões da forma $a + ib$ onde a, $b \in \mathbb{R}$ e i é a *unidade imaginária* e satisfaz $i^2 = -1$. Podem ser adicionados e multiplicados:

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac + aid + ibc + ibid \\ &= ac + i^2bd + iad + ibc \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Essas operações satisfazem nove propriedades e tornam o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos um *corpo*. O célebre *Teorema Fundamental da Álgebra* garante que toda equação polinomial de grau $n \geq 1$

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

com coeficientes complexos $a_0, \ldots, a_n$ tem n soluções complexas (*raízes* do polinômio), contadas as multiplicidades.

1.2 O *conjugado* de $z = a + ib \in \mathbb{C}$ é $\bar{z} = a - ib$. Note que $z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$. Então se $z \neq 0$, temos $a^2 + b^2 > 0$ e o *inverso* de z é dado por $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$. Temos

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w},\ \overline{zw} = \bar{z}\bar{w},$$
$$\bar{\bar{z}} = z,\ \Re z = \frac{z+\bar{z}}{2},\ \Im z = \frac{z-\bar{z}}{2i},$$

onde $\Re z$ e $\Im z$ são respectivamente chamados de *parte real* e *parte imaginária* de z.

1.3 Identificando $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$, a adição de números complexos coincide com a adição de vetores. Temos também

$$|z| = z\bar{z},\ \langle z, w\rangle = \Re\{z\bar{w}\}.$$

Segue que

$$|zw| = |z|\,|w|, \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

De

$$\langle z, w\rangle^2 + \langle z, iw\rangle^2 = |z|^2|w|^2$$

deduzimos a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle z, w\rangle| \leq |z||w|. \tag{1}$$

O ângulo θ entre z, $w \neq 0$ satisfaz

$$\cos\theta = \frac{\langle z, w\rangle}{|z||w|}.$$

Calculando
$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\langle z, w\rangle \tag{2}$$
e notando que $\theta + \varphi = \pi$ onde φ é a medida do ângulo oposto ao lado $\overline{0\,z+w}$ no triângulo de vértices 0, z, $z+w$, vem a *Lei dos Cossenos*
$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2|z||w|\cos\varphi.$$
Finalmente, (1) e (2) dão a *Desigualdade Triangular*
$$|z+w| \leq |z| + |w|,$$
de onde tiramos que $|z-w| + |w| \geq |(z-w)+w| = |z|$; trocando os papéis de z e w, obtemos
$$|z-w| \geq ||z| - |w||.$$
1.4 Usando *coordenadas polares* em $\mathbb{R}^2$, podemos escrever
$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$
Se $w = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, a multiplicação fica
$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi\sin\theta) \\ &= rs(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)). \end{aligned}$$
Em particular,
$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta).$$
Por exemplo, as raízes quadradas de $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ podem ser calculadas desta forma. A equação $w^2 = z$ tem as soluções
$$w = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
e
$$\begin{aligned} w &= \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right) \\ &= -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Ex. 1.1 Calcular as partes reais e imaginárias de
$$(1+2i)^3, \ \left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2, \ \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Ex. 1.2 Quais são as raízes quadradas de i?

Ex. 1.3 Resolver a equação $z^2 + z + 1 = 0$.

Ex. 1.4 Calcular $(\sqrt{3} + i)^9$.

Ex. 1.5 Prove que para $\alpha \neq \beta$ temos

$$\left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| = 1$$

se $|\alpha| = 1$ ou $|\beta| = 1$.

Ex. 1.6 Sendo α, $\beta \in \mathbb{C}$, mostre que $|z - \alpha| + |z + \alpha| = 2|\beta|$ é a equação de uma elipse. Identifique os focos e semi-eixos.

Ex. 1.7 Sendo z, $w \in \mathbb{C}$ dois vértices de um quadrado, determine os outros dois vértices em todos os casos possíveis.

Ex. 1.8 Expressar $\sin 5\theta$ em função de $\cos\theta$ e $\sin\theta$.

Ex. 1.9 Qual são as condições sobre α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$ para que a equação $\alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0$ represente uma reta?