# SEQUÊNCIAS E SÉRIES

18/10/22

**Sequência numérica infinita:**

$c_1, c_2, c_3, \ldots$ números complexos

$(c_n)_{n=1}^{\infty}$ $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$

Naturais $1, 2, 3, 4, \ldots$

Pares $2, 4, 6, 8, \ldots$

Primos $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

Quadrados perfeitos $1, 4, 9, 16, \ldots$

Potências de 2 $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

$\to \infty$

GOL

Lugar algum

Dígitos de $\pi$ $3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, \ldots$

Recíprocos de naturais $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \to 0$

**Convergência**: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow |c - c_n| < \varepsilon.$$

$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge para $\infty$ se

dado $M > 0$ $\exists\, n_0$ t.q. $n \geq n_0 \Rightarrow |c_n| > M$.

Exemplo. Fibonacci:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & 21, & 34, \ldots \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & & & & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & & & \end{array}$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (\text{razão áurea})$$

$$0 < b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{b_n}$$

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} \qquad \text{Se } \lim_{n\to\infty} b_n = L^{>0}, \text{ então}$$

$$\lim b_{n+1} = 1 + \frac{1}{\lim b_n} \qquad L = 1 + \frac{1}{L}$$

$$L^2 - L - 1 = 0 \qquad L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore L = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

**Fato.** Toda sequência crescente e limitada de números reais é convergente.

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \text{ é completo.}$$

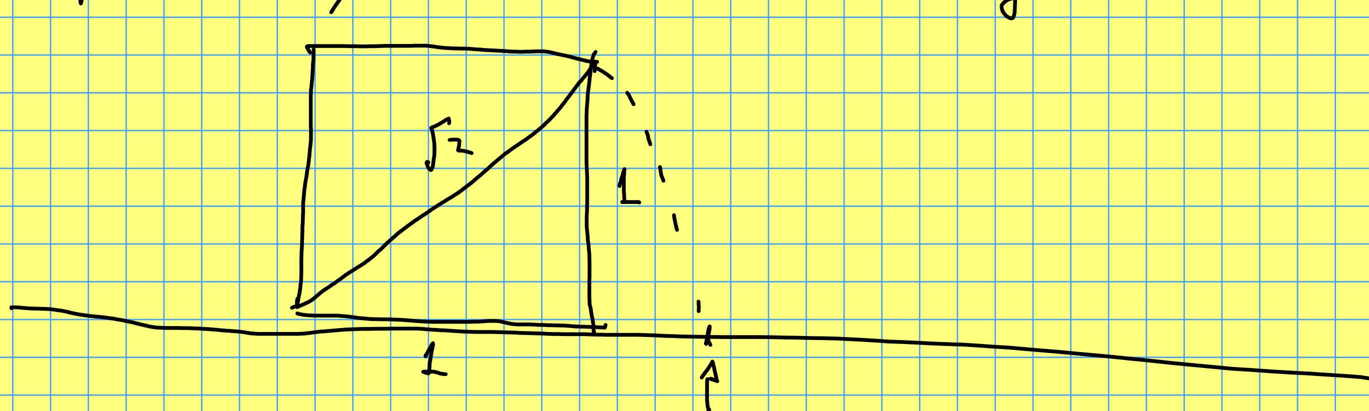
$\sqrt{2}$

Sequência em $\mathbb{Q}$:

1   1,4   1,41   1,414   1,4142   1,41421

1,414213   1,4142135   ...   $< 2$

Crescente e limitada $\Rightarrow$ Converge em $\mathbb{R}$ para $\sqrt{2}$, mas não converge em $\mathbb{Q}$.




$b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ é crescente e limitada?

Mostremos que $1 \le b_n < 2$ $\forall n$ por indução.

$b_1 = \frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow 1 \le b_1 \le 2$

Assumimos $1 \le b_n < 2$. Então

$b_{n+1} = 1 + \underbrace{\frac{1}{b_n}}_{>0} > 1$ ok.

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} \leq 2$$

$$1 \leq b_n < 2 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b_n} \leq 1}$$

— // —

**Exemplo** $\quad c_n = -1 + i\,\frac{(-1)^n}{n^2}$ numerador é limitado, denominador $\to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = -1$$

$$c_n = a_n + i b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n + i \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\operatorname{Re} \lim c_n = \lim \operatorname{Re} c_n \qquad \operatorname{Im} \lim c_n = \lim \operatorname{Im} c_n .$$

— // —

**Ex.**

$$2^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}}}} = \, ?$$

Não é

$$\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 2^2 = 4$$

— // —

**SÉRIES**

É uma "soma infinita"

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots + c_n + \dots$$

(série numérica de n.^os complexos)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

Dada uma série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, construímos as somas parciais:

$s_0 = c_0$

$s_1 = c_0 + c_1$

$s_2 = c_0 + c_1 + c_2$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

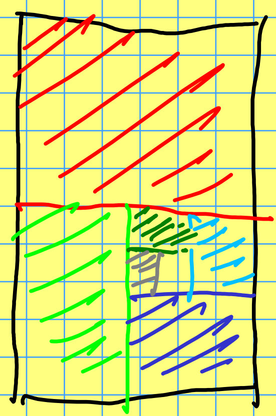
$s_0, s_1, s_2, \dots$ é uma sequência.

Dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ é <u>convergente</u> para $L$ se a seq. das somas parciais $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ for convergente para $L$.

<u>Ex</u>. (Série geométrica)

Fixemos $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\dots+\alpha^n+\dots = ?$$



$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = 1 \\ \text{Razão } 1/2, \text{ termo inicial } 1/2 \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots\right) = 1$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots = 2$$

$$-(S_n = 1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^n) \quad \times \alpha$$

$$+(S_{n+1} = 1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^n+\alpha^{n+1})$$

---

$$\underbrace{S_{n+1}}_{S_n+\alpha^{n+1}} - \alpha S_n = 1$$

$$\alpha^{n+1} + S_n(1-\alpha) = 1$$

$$S_n = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \lim_{n\to\infty} \alpha^{n+1}$$

Se $|\alpha| < 1$ então $\lim_{n\to\infty} |\alpha|^{n+1} = 0$

$$\Rightarrow \left|\lim_{n\to\infty} \alpha^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} |\alpha^{n+1}| = \lim_{n\to\infty} |\alpha|^{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha^{n+1} = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\alpha} \quad |\alpha|<1$$

$$\boxed{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{se} \quad |\alpha| < 1}$$

Ex. $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{1/2} = 2$

Condição do termo geral de uma série

Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ é convergente então $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Dem. Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = S$ então $\quad c_n = S_{n+1} - S_n$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n \qquad S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} c_k$$

$= S - S = 0$ //

Na série geom. $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots$ o termo geral é $\alpha^n$. Se $|\alpha| \geq 1$ então $\lim_{n\to\infty} |\alpha|^n = \infty$

$\Rightarrow \left| \lim \alpha^n \right| = \lim |\alpha|^n = \infty$

$\Rightarrow \lim \alpha^n \neq 0$. Logo se $|\alpha| \geq 1$ a série geom não pode ser convergente.

Ex. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2}$

— // —

Método de comparação de séries reais com termos não-negativos

$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad a_n \in \mathbb{R} \qquad a_n \geq 0 \quad \forall n$

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$

Seq das somas parciais é crescente

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + \underbrace{a_1}_{\geq 0} \geq a_0 = S_0$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = S_1 + \underbrace{a_2}_{\geq 0} \geq S_1$ etc.

Consideremos duas séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ com $0 \leq \underline{a_n} \leq \underline{b_n}$ $\forall n$

<u>Então:</u>

Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ também é convergente.

<u>Dem:</u> Seja $t = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Temos

$$0 \leq S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n = t$$

$\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e <u>limitada</u>

Pelo Fato, $(S_n)$ é conv. $\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é conv

<u>Ex:</u> Dada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$, vamos compará-la com uma série geométrica:

$$0 \leq \underbrace{\frac{1}{1+2^n}}_{a_n} \leq \frac{1}{2^n} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{b_n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2 \text{ é conv.}$$

Pelo Método de comparação, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ é conv.

e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} \leq 2$.

---

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ uma série de nº complexos.

Então vale:

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ é convergente então

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ também é convergente.

Dem. $c_k = a_k + i b_k$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |a_k| \leq |c_k| \\ 0 \leq |b_k| \leq |c_k| \end{array}\right\} \underset{\text{Met. de comp}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} \to \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \\ \to \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \end{array} \text{ são convergentes}$$

$(0 \leq a_n \leq |a_n|)$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \underbrace{a_n + |a_n|} \leq 2|a_n| \\ 0 \leq b_n + |b_n| \leq 2|b_n| \end{array}\right\} \underset{\text{Met. comp.}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} \sum a_n + |a_n| \\ \sum b_n + |b_n| \end{array}\right\} \text{conv.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n + |a_n|\right)}_{\text{conv.}} - \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right)}_{\text{conv.}}$$

$\therefore$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv.

Analogamente $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ conv

$\therefore$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é conv. //

---

Ex. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{1+2^n}$ $\displaystyle\left|\frac{i^n}{1+2^n}\right| = \frac{1}{1+2^n}$

Sabemos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ é conv.

$\therefore$ $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{i^n}{1+2^n}$ também é conv.

Def

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n \qquad c_n \in \mathbb{C}$

Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ é conv., dizemos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ é <u>absolutamente convergente</u>.