12.a aula: 4out (resumo)

12.1 Seqüências infinitas. Dada uma seqüência $c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots$ de números complexos, dizemos que ela converge para $c \in \mathbb{C}$ se dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$|c_n - c| < \epsilon \quad \text{para } n \geq n_0$$

e escrevemos $\lim_{n\to\infty} c_n = c$. Uma seqüência pode ter no máximo um limite. Se $c_n = a_n + ib_n$ e $c = a + ib$, então $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ se e somente se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Por exemplo, $c_n = -1 + i\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge para -1.

12.2 Séries infinitas. Dada uma seqüência $c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots$ de números complexos, dizemos que a série infinita $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge se $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k$ existe e é finito. Neste caso, $s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k$ é a soma da série, denotada também por $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$. O número c_n é dito o n-ésimo termo da série e $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_n$ é dita a n-ésima soma parcial. Uma série que não converge é dita divergente.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ é convergente então necessariamente $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. De fato $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$. Por exemplo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ é divergente.

Se $c \in \mathbb{C}$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ converge para $\frac{1}{1-c}$ se $|c| < 1$ e diverge se $|c| \geq 1$.

Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge então $|\sum_{n=0}^{\infty} c_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$.

Se $c_n = a_n + ib_n$ onde $a_n,\ b_n \in \mathbb{R}$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge para s se e somente as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergem para $\Re s$ e $\Im s$.

12.3 Critério de comparação para séries reais com termos não-negativos. Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ séries com termos reais tais que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n. Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ também o é. De fato sendo $t = \sum_{k=0}^{\infty} b_n$, temos $\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_n \leq t$, de modo que $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ é uma seqüência de números reais crescente e limitada superiormente que portanto tem um supremo, que é o limite da seqüência.

Por exemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ é majorada termo a termo pela série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$ e portanto é convergente.

12.4 Convergência absoluta. A série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ é dita absolutamente convergente se a série $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ é convergente. Vamos provar que se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ é absolutamente convergente então ela é convergente. De fato sendo $c_k = a_k + ib_k$ temos $|a_k| \leq |c_k|$ e $|b_k| \leq |c_k|$ para todo n. Como $\sum_{k=0}^{\infty} |c_n|$ é convergente e $0 \leq |a_n| \leq |c_n|$ para todo n, por (12.3) vem que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$ é convergente. Agora $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ para todo n, e novamente (12.3) diz que $\sum_{n=0}^{n}(a_n + |a_n|)$ é convergente. Segue que $\sum_{k=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{n}((a_n + |a_n|) - |a_n|) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$ é convergente. Analogamente $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ é convergente e segue da última afirmação de (12.2) que $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ é convergente.

12.5 Série de potências. Uma série de potências é da forma

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{1}$$

onde a_n são coeficientes complexos e z é uma variável complexa. Mais geralmente pode-se também considerar séries de potências da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Já vimos que a série geométrica

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

é uma série convergente para $1/(1-z)$ para $|z| < 1$; dizemos que ela representa a função $f(z) = 1/(1-z)$ na bola aberta $|z| < 1$. A mesma função é representada pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z+1)^n$$

na bola aberta de raio maior $|z+1| < 2$. De fato

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2} \right)^n.$$

12.6 Limite superior de uma seqüência real. Seja $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$ uma seqüência de números reais. Formamos a seqüência $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ onde

$$\alpha_n = \sup\{a_k : k \geq n\}.$$

Esta é uma seqüência não-crescente em $[-\infty, +\infty]$ e portanto converge para um limite em $[-\infty, +\infty]$. Este limite é chamado de limite superior da seqüência original e denotado

$$\limsup_{n \to \infty} a_n.$$

O limite superior de $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sempre existe e coincide com o supremo dos limites de todas as subseqüências convergentes de $(a_n)_{n=0}^{\infty}$; em particular, se $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ já era convergente, então $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. Analogamente define-se o limite inferior e ele satisfaz $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\liminf_{n\to\infty}(-a_n)$. Alguns exemplos:

(a) $\limsup_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \limsup_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

(b) $\limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1$

(c) $\limsup_{n\to\infty} n = +\infty$

(d) $\limsup_{n\to\infty} (-n) = -\infty$

(e) Se $\rho < \limsup_{n\to\infty} a_n$ então $\rho < a_n$ para infinitos índices n.

(f) Se $\rho > \limsup_{n\to\infty} a_n$ então $\rho > a_n$ só deixa de valer para um número finito de índices n.

Ex. 12.1 Prove que uma seqüência convergente é limitada (Uma seqüência $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ é dira limitada se existe $R > 0$ tal que $|c_n| < R$ para todo n.)

Ex. 12.2 Determinar a série de potências que representa a função $1/z$ em torno de um ponto $z_0 \neq 0$ dado. Qual é o região de convergência?

Ex. 12.3 Determinar a série de potências que representa a função z em torno de um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ dado. Qual é o região de convergência? Repetir o exercício para z^2. Você consegue generalizar o resultado para z^k, k um inteiro positivo?

Ex. 12.4 Sendo $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ duas seqüências de números reais, mostrar que

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$