MAT220 – Cálculo Diferencial e Integral IV
Lista de Exercícios 7 – 04/11/2010

Prof. Claudio Gorodski

1. Determinar o raio de convergência das seguintes séries de potências:

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, z^n$

b. $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, z^n$

c. $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}\, z^n$

d. $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(z-i)^n}{n!}$

e. $\sum_{n=0}^{+\infty} \log(3n^2+5)(z+i)^n$

f. $\sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{senh} n)\, z^n$

g. $\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^{3n}\, z^n$

h. $\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n})^n\, z^n$

i. $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4^n}{n}\, z^{2n}$

j. $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{3^n} z^{n^2}$

2. Expandir a função $f(z)$ em série de potências em torno do ponto z_0 e indicar o raio de convergência:

a. $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = i$

b. $f(z) = \frac{1}{2z-3}$, $z_0 = 0$

c. $f(z) = \frac{i}{z+i}$, $z_0 = 1$

3. Desenvolver a função o indicada em série de Taylor em torno do ponto indicado e exibir o disco de convergência:

a. $f(z) = \operatorname{senh} z$, $z_0 = 0$

b. $f(z) = \operatorname{senh} z$, $z_0 = \pi i$

c. $f(z) = \cos z$, $z_0 = \pi/2$

d. $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$

e. $f(z) = \operatorname{sen} z^2$, $z_0 = 0$

f. $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $z_0 = 1$

g. $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $z_0 = 2$

h. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$, $z_0 = 0$

i. $f(z) = \dfrac{2}{(1-z)^3}$, $z_0 = 0$

4. Mostre que $\lim_{z\to\pi i} \dfrac{\operatorname{senh} z}{z - \pi i} = -1$.

5. Seja

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\cos z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}} & \text{se } z \neq \pm\frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{\pi} & \text{se } z = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Mostre que f é inteira.

6. Representar a função $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ por série de potências:

a. no domínio $|z| < 1$;

b. no domínio $|z| > 1$.

7. Desenvolver a função indicada em série de Laurent na região inidicada:

a. $f(z) = \dfrac{1}{4z - z^2}$, $0 < |z| < 4$

b. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$, $0 < |z-1| < 2$

c. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$, $|z-1| > 2$

8. Mostre que:

a. $\csc z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z - \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{(3!)^2}\right) z^3 + \cdots \quad (0 < |z| < \pi)$

b. $\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}z - \frac{1}{720}z^3 + \cdots \quad (0 < |z| < 2\pi)$

9. Desenvolver em série de potências de z a função $f(z) = \log(1+z)$ cujo ramo está fixado pela condição $\log 1 = 0$, e exibir a região de convergência.

10. Desenvolver em série de potências de z a função $\arctan z$ cujo ramo está fixado pela condição $\arctan 0 = 0$, e exibir a região de convergência.