

MAT220 – Cálculo Diferencial e Integral IV
Lista de Exercícios 5 – 05/10/2010

PROF. CLAUDIO GORODSKI

1. Calcular:

a. $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$

b. $\int_0^{\pi/6} e^{2it} dt$

2. Calcular $\int_{\gamma} f(z) dz$ onde:

a. $f(z) = y - x - 3x^2i$ e γ é o segmento de reta entre 0 e $1 + i$.

b. $f(z) = y - x - 3x^2i$ e γ é a concatenação dos segmentos de reta de 0 a i e de i a $1 + i$.

c. $f(z) = \frac{z+2}{z}$ e γ é o círculo $z = 2e^{i\theta}$ onde θ varia de $-\pi$ a π .

d. $f(z) = 3z + 1$ e γ é o contorno do quadrado de vértices 0, 1, $1 + i$ e i .

3. Calcular:

a. $\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz$.

b. $\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz$

c. $\int_1^3 (z - 2)^3 dz$

4. Sendo γ o arco do círculo $|z| = 2$ situado no primeiro quadrante, mostre que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

sem calcular o valor da integral.

5. Calcular $\int_{\gamma} f(z) dz$ onde:

a. $f(z) = \tan z$ e γ é o círculo $|z| = 1$.

b. $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$ e γ é o círculo $|z| = 1$.

c. $f(z) = \log(z - 2)$ e γ é o círculo $|z| = 1$.

6. Seja C a fronteira da região delimitada pelo círculo $|z| = 4$ e o quadrado de lados sobre as retas $\Re z = \pm 1$, $\Im z = \pm 1$. Explique porque existe uma orientação para C de modo que $\int_C f(z) dz = 0$ quando:

a. $f(z) = \frac{1}{3z^2+1}$

b. $f(z) = \frac{z+2}{\operatorname{sen} \frac{z}{2}}$

c. $f(z) = \frac{z}{1-e^z}$

7.

a. Seja γ **qualquer** curva suave fechada simples que contém a origem no seu interior. Calcular $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$.

b. Repetir o cálculo do item (a) no caso em que a origem está no exterior de γ .

8.

a. Calcular $\int_{-2i}^{2i} \frac{1}{z} dz$ para uma caminho suave unindo $-2i$ a $2i$ que está inteiramente contido no semi-plano $\Re z \geq 0$ e não passa pela origem.

b. Repetir o cálculo do item (a) no caso em que o caminho está inteiramente contido no semi-plano $\Re z \leq 0$ e não passa pela origem.

9. Calcular $\int_C (z+1)^{1/2} dz$ onde C é um caminho suave unindo $-1-4i$ a $-1+9i$ contido no plano $\Re z \geq -1$ e que não passa pelo ponto -1 (especifique o ramo da raiz quadrada tomando $1^{1/2} = -1$).

10. Calcular $\int_C f(z) dz$ onde C é o círculo unitário $|z| = 1$ orientado no sentido anti-horário, e $f(z) = z^{-1+i} = \exp[(-1+i) \log z]$, $|z| > 0$ e $0 < \arg z < 2\pi$.