MAT220 – Cálculo Diferencial e Integral IV
Lista de Exercícios 2 – 22/08/2010

Prof. Claudio Gorodski

1. Determinar as partes real e imaginária das funções dadas:

a. $f(z) = z^2 - 4z + 2$;

b. $f(z) = \frac{2}{z-7}$;

c. $f(z) = e^z(z - i)$.

2. Calcule os limites indicados:

a. $\lim_{z\to -i}(z^2 - 3z)$

b. $\lim_{z\to 2i} \frac{9}{z^2+4}$

c. $\lim_{z\to\infty} \frac{z+2}{z^2-3}$

d. $\lim_{z\to\infty} \frac{4z+5}{2z-1}$

3. Usar as fórmulas apresentadas em aula para calcular a derivada da função dada nos pontos em que ela existir:

a. $f(z) = 3z^2 - 4z + 1$

b. $f(z) = (2 + z^2)^7$

c. $f(z) = \frac{z-1}{2z+1}$

4. Use a definição para mostrar que a função $f(z) = \bar{z}$ não é derivável em nenhum ponto.

5. Use as condições de Cauchy-Riemann para mostrar que as funções dadas não são deriváveis em nenhum ponto ($z = x + iy$):

a. $f(z) = \bar{z}$

b. $f(z) = \Im z$

c. $f(z) = 2x + ixy^2$

d. $f(z) = e^{\bar{z}}$

6. Use as condições de Cauchy-Riemann e a continuidade das derivadas primeiras das partes real e imaginária para mostrar que as funções dadas são deriváveis em todos os pontos, e calcule a derivada ($z = x + iy$):

a. $f(z) = z^3$

b. $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$

c. $f(z) = \cos x \cosh y - i \text{sen}\, x \text{senh}\, y$

7. Usar as condições de Cauchy-Riemann e a continuidade das derivadas primeiras das partes real e imaginária para determinar os pontos em que as funções $f(z)$ dadas são deriváveis e calcular o valor de $f'(z)$ nesses pontos:

a. $f(x+iy) = x^2 + iy^2$

b. $f(x+iy) = x^2 + y^2$

c. $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$ (Cuidado!)

8. Seja
$$f(z) = z^{1/2} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)$$
onde $z = r(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$, $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$. Mostre que $f'(z)$ existe em todos os pontos, exceto nos pontos do semi-eixo real negativo, e que $f'(z) = \frac{1}{2f(z)}$.

9. Prove as seguintes identidades:

a. $\text{sen}\, iz = i\text{senh}\, z$

b. $\text{sen}\,(z_1 + z_2) = \text{sen}\, z_1 \cos z_2 + \text{sen}\, z_2 \cos z_1$

c. $\text{sen}\,(x+iy) = \text{sen}\, x \cosh y + i \cos x \text{senh}\, y$

d. $\text{senh}\,(z_1 + z_2) = \text{senh}\, z_1 \cosh z_2 + \text{senh}\, z_2 \cosh z_1$

e. $\text{senh}\,(x+iy) = \text{senh}\, x \cos y + i \cosh x \text{sen}\, y$

f. $\exp(z + i\pi) = -\exp z$

10. Calcular todos os zeros das funções $\text{sen}\, z$ e $\cos z$.

11. Determinar todos os valores de z tais que:

a. $e^z = -2$

b. $\exp(2z - 1) = 1$