EXERCÍCIOS

20/07/21

§5.5, Ex. 10, versão em inglês, p. 322

(a) Quantos graus de liberdade há em uma matriz simétrica real, uma matriz diagonal real, e uma matriz ortogonal real?

Matrizes simétricas reais $n\times n$: $A = A^t$

$$\{ A \in M(n,\mathbb{R}) \mid A = A^t \}$$

$A = (a_{ij})$

$A^t = (a_{ji})$

$a_{ij} = a_{ji}$

é um subespaço vetorial de $M(n,\mathbb{R})$

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$$

$A = A^t$
$B = B^t \Rightarrow (\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$

nº de graus de liberdade = dim do subespaço

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{ij} \ i>j \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & a_{nn} \\ i<j & & \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} n-1 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

$$\text{dimensão} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nº de coefs} \\ \text{diagonais}}}{n} + \underbrace{1 + 2 + \dots + n-1}_{\text{nº de coefs acima da diagonal}}$$

$$= n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Matrizes diagonais ($a_{ij} = 0$ se $i \neq j$)

$$\left\{ A \in M(n,\mathbb{R}) \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$

é um subespaço vetorial de $M(n,\mathbb{R})$. De fato:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n+\mu_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha\lambda_n \end{pmatrix}$$

dimensão $= n$

Matrizes ortogonais $\quad A^{-1} = A^t$

$AA^t = I$ é uma equação linear?

$$x^2 = 1$$

$$(A+B)\underbrace{(A+B)^t}_{=A^t+B^t} = AA^t + BB^t + \underbrace{AB^t + A^tB}_{!}$$

Formam as matrizes ortogonais um subespaço vetorial de $M(n,\mathbb{R})$?

É a matriz nula ortogonal?

$O O^t = O O = O \neq I$ Não. Não)

Quantos coeficientes independentes temos para uma matriz ortogonal?

$A^t A = I \iff$ Colunas de A formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$

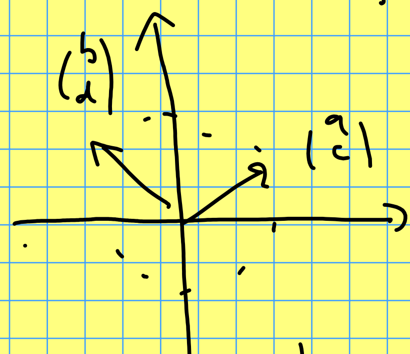
$A = (a_{ij})$

$A \in M(n, \mathbb{R})$

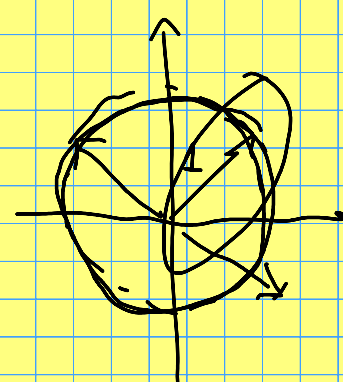
$$\iff \left.\begin{array}{l} a_{11}^2 + \dots + a_{n1}^2 = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}^2 + \dots + a_{nn}^2 = 0 \end{array}\right\} n \text{ eq.}$$

$$\underset{\text{eq.}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \binom{n}{2} \quad \left\{\begin{array}{l} a_{11} a_{12} + \dots + a_{n1} a_{n2} = 0 \\ \vdots \\ a_{1,n-1} a_{1,n} + \dots + a_{n,n-1} a_{n,n} = 0 \end{array}\right.$$

$\underline{n = 2}$

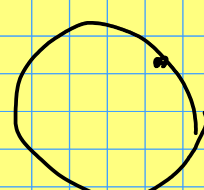


$$\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ c & d \end{array} \right)$$



Numa base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, o 1.º vetor (que é unitário) determina o 2.º vetor da base, a menos de sinal.

N.º de Graus de liberdade para matriz ortogonal, $n = 2$, é $\underline{1}$.



1 grau de liberdade

Se $A \in M(n,\mathbb{R})$, $A = A^t$, então pelo T. Espectral, A é diagonalizável, e, de fato,

$$A = Q \Lambda Q^t$$

$(Q, \Lambda) \to A$
$(Q', \Lambda') \nearrow$

onde Q é uma matriz ortogonal e Λ é uma matriz diagonal.

nº graus liberdade $A = A^t$	=	nº graus lib $AA^t = I$	+	nº graus lib Λ diag.
$\frac{n(n+1)}{2}$	=	x	+	n

$$\therefore \; x = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ex. 5-9, Exs. de Revisão, p 307, v. em port

<u>V ou F ?</u>

(a) Se B é uma matriz obtida a partir de outra matriz A trocando-se duas linhas, então B é semelhante a A?

" $A \sim B$
"A é semelhante a B" $\iff$ $\exists$ matriz inversível M tq. $M^{-1} A M = B$.

Seja M uma matriz de permutação:

b) $\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ e_2\ e_1\end{array}$, $\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ e_2\ e_1\ e_3\end{array}$, $\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\ e_2\ e_3\ e_1\ e_4\end{array}$ ...

Uma matriz de permutação é sempre ortogonal, pois as colunas são os vetores da base canônica, mas dispostos em outra ordem, logo formam uma base o.n. do espaço.

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&a\\d&c\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}d&c\\b&a\end{pmatrix}$$

Foram permutadas as linhas 1 e 2, e as colunas 1 e 2

Lembremos: • matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores, com as mesmas multiplicidades

• $\det B = -\det A$ (*)

| permutação de 2 linhas troca o sinal do det |

• Qual é a relação entre os autovalores e o det?

Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A, então $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

Juntando essas informações:

Se $A \sim B$ então $\det A = \det B$.

Com (*), isso dá $\det A = \det B = 0$

Mas então a afirmação (a) não pode ser verdadeira no caso de matrizes não-singulares (com $\det \neq 0$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$= I$ $\qquad$ $= P$ (matriz de permutação)

$A \not\sim B$ pois

$$M^{-1} A M = M^{-1} I M \doteq M^{-1} M = I = A$$

A matriz I só é semelhante a ela mesma.

F

(b) Se uma matriz triangular T é semelhante a uma matriz diagonal D, então T já é diagonal!

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \sim D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Autovalores a, c $\Rightarrow$ $b = 0$? Autoval λ_1, λ_2

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \sim D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow b = 0$?

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ é suficiente para T ser diagonalizável

$$T = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sim D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ é verdade!

para todo b

Se $b \neq 0$, T não é diagonal! **F**

(c) $\boxed{A \text{ é Hermitiana}}$ $\boxed{A \text{ é unitária}}$

(i) $A = A^*$ (ii) $AA^* = I$

$\boxed{A^2 = I}$ $A^2 = I$ (iii)

(i), (ii) $\Rightarrow$ (iii) $A = A^*$, $AA^* = I$ $\Rightarrow$ $A \cdot A = I \Rightarrow A^2 = I$

(i), (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\quad A = A^*$

$A^2 = I \Rightarrow AA = I \Rightarrow AA^* = I$

(ii), (iii) $\Rightarrow$ (i)

$\to \; AA^* = I \Rightarrow A^* = A^{-1} \quad \Rightarrow A = A^*$

$\to \; A^2 = I \Rightarrow AA = I \Rightarrow A = A^{-1}$

V

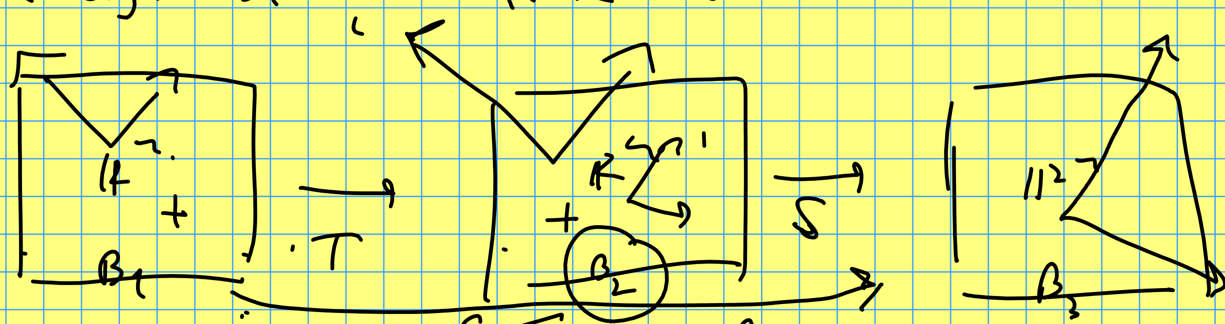
(d) A, B diagonalizáveis

$\Rightarrow A \cdot B$ diagonalizável!

$\underline{A}$ diagonalizável $\Leftrightarrow$ $\exists$ base do espaço formada por autovetores de A

$\underline{B}$ diagonalizável $\Leftrightarrow$ $\exists$ base do espaço formada p/ autovet. de B

Transformações lineares $\qquad B_3$ base de $\mathbb{R}^m$



$[T]^{B_1}_{B_2} = B \qquad [S]^{B_2}_{B_3} = A$

$[ST]^{B_1}_{B_3} = [S]^{B_2}_{B_3} [T]^{B_1}_{B_2} = AB$

Se $v \neq 0$ é um autovetor de $\underline{A}$ e de $\underline{B}$:

$$Av = \lambda v \qquad Bv = \mu v$$

então

$$\begin{aligned}(AB)v &= A(Bv)\\ &= A(\mu v)\\ &= \mu(Av)\\ &= \mu(\lambda v)\\ &= (\lambda\mu)v\end{aligned}$$

e v é um autovetor de $\underline{AB}$.

Rascunho

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underset{a \neq c}{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}} \underset{a' \neq c'}{\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}$$

$aa' = 1 \qquad a = 2 \quad a' = 1/2$

$cc' = 1 \qquad c = c' = 1$

$ab' + bc' = 1 \qquad 2b' + b = 1$

$b' = 0 \quad b = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são diagonalizáveis $\qquad$ diag

$$AB = \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 \\ 0 & \underline{1} \end{pmatrix}$$ não é diagonalizável

Autovalores : 1, 1

$N(AB - I) = ?$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{y = 0}$$

$$N(AB - I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{dim } 1$$

Autovetores são múltiplos de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.