O TEOREMA ESPECTRAL

13/07/21

Versão $\mathbb{C}$

Dada uma matriz A Hermiteana, $A^* = A$

existe uma matriz U unitária tal que $U^* = U^{-1}$

$U^{-1} A U$ é uma matriz diagonal real

Versão $\mathbb{R}$

Dada uma matriz A simétrica real, $A^t = A$

existe uma matriz Q ortogonal tal que $Q^t = Q^{-1}$

$Q^{-1} A Q$ é uma matriz diagonal.

—॥—

Exemplo. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$ é Hermiteana.

$A^* = \overline{A}^t$ $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3+3i \\ 3-3i & 5 \end{pmatrix}$

$(\overline{A})^t = \overline{(A^t)}$ $\qquad A^* = \overline{A}^t = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} = A$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-3i \\ 3+3i & 5-\lambda \end{vmatrix} = 10 + \lambda^2 - 7\lambda - (9+9)$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda - 8 = (\lambda - 8)(\lambda + 1)$$

Autovalores (reais!) $-1, 8$

$\boxed{\lambda = -1}$ $N(A+I) = ?$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3-3i \\ 3+3i & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 3x + (3-3i)y = 0 \\ x + (1-i)y = 0 \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} = v_1$ é solução

$\boxed{\lambda = 8}$ $N(A-8I) = ?$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3-i \\ 3+3i & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (3+3i)x - 3y = 0 \\ (1+i)x - y = 0 \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = v_2$ é solução

$-1 \neq 8 \Rightarrow v_1^* v_2 = 0$ (produto Hermiteano)

$$\begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = (1+i \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$= 1+i - (1+i) = 0 \checkmark$$

U é unitária $\iff U^*U = UU^* = I$

$\iff$ As colunas de U são vetores unitários e mutuamente ortogonais em rel ao prod Herm

$\iff$ As linhas de U são vetores unitários e mutuamente ortogonais em rel ao prod Herm

$\Leftrightarrow$ As colunas de U formam uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$

$\Leftrightarrow$ As linhas de U formam uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \|v_1\|^2 = |1-i|^2 + |-1|^2$$

$$= 1^2 + (-1)^2 + 1$$

$$= 3$$

$\tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_1$ é um autovetor unitário de A

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \qquad \|v_2\|^2 = |1|^2 + |1+i|^2$$

$$= 1 + 1^2 + 1^2 = 3$$

$\tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_2$ é um autovetor unitário

$$U = \begin{pmatrix} | & | \\ \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix}$$

é uma matriz unitária e

$$U^{-1} A U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

—//—

Lema. Dada uma matriz complexa $n \times n$ A, $(n \geq 1)$ existe uma matriz unitária U tal que $U^{-1} A U = T$ é triangular.

Dem. Para fixar ideias, $n=4$

$p_A(\lambda)$ polinômio característico é um polinômio complexo de grau n

$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$

Logo, p_A tem $n \, (=4)$ raízes complexas (contadas as multiplicidades)

A tem um autovalor complexo $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

Autovetor associado $v_1 \in \mathbb{C}^n$: $\underline{Av_1 = \lambda_1 v_1}$

Construímos

$$U_1 = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert \\ v_1 & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix}$$

1.ª coluna é v_1

Completamos U_1 tomando as outras colunas de modo que as colunas de U_1 formem uma base ortonormal.

(Podemos fazer isso por Gram-Schmidt)

U_1 é então uma matriz unitária

$$AU_1 = A\begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert \\ v_1 & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert \\ Av_1 & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert \\ \lambda_1 v_1 & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert \\ v_1 & \vert & \vert & \vert \\ \vert & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix}}_{=U_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vert & \vert & \vert \\ 0 & \vert & \vert & \vert \\ 0 & \vert & \vert & \vert \\ 0 & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = U_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vert & \vert & \vert \\ 0 & \vert & \vert & \vert \\ 0 & \vert & \vert & \vert \\ 0 & \vert & \vert & \vert \end{pmatrix}$$

$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

bloco 3×3 tem autovalor λ_2, autovetor v_2

$$M_2 = \begin{pmatrix} | & * & * \\ v_2 & * & * \\ | & * & * \end{pmatrix} \quad \text{matriz unitária}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\to \quad U_2^{-1}\left(U_1^{-1} A U_1\right) U_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

← bloco 2x2
autovalor λ_3
autovetor v_3

$$M_3 = \begin{pmatrix} | & * \\ v_3 & \\ | & * \end{pmatrix} \quad \text{unitária}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & M_3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{U_3^{-1}\left(U_2^{-1}\left(U_1^{-1} A U_1\right) U_2\right) U_3}_{= (U_1 U_2 U_3)^{-1} A (U_1 U_2 U_3)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

é triangular superior

$U = U_1 U_2 U_3$ é uma matriz unitária.

pois

$$U^* = (U_1 U_2 U_3)^* = U_3^* U_2^* U_1^* = U_3^{-1} U_2^{-1} U_1^{-1}$$

$$= (U_1 U_2 U_3)^{-1} = U^{-1}$$

e $U^{-1} A U = T$ é triang sup //.

Dem do T. Espectral (2) Dada A, matriz Hermiteana, usamos o Lema para determinar uma matriz unitária U t.q. $U^{-1}AU$ seja triangular:

$$U^{-1}AU = T \quad \text{e } T \text{ é triangular}$$

Mas sabemos que $A = A^*$.

$$(U^{-1}AU)^* = T^*$$

$$U^* A^* (U^{-1})^* = T^*$$

U é unitária: $U^{-1} = U^*$ Então $(U^{**} = U)$

$$\underbrace{U^{-1} A U}_{=T} = T^*$$

$$\Rightarrow T = T^* \Rightarrow T = \overline{T}^t$$

$$T = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad \underbrace{\overline{T}^t}_{=} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Isso quer dizer que T é diagonal!

Agora

$$U^{-1}AU = T \text{ e } T \text{ é diagonal}$$

//.

MUDANÇA DE BASE × SEMELHANÇA DE MATRIZES

Duas matrizes $n \times n$ A, B são ditas **semelhantes** ou **conjugadas** se existe uma matriz $n \times n$ invertível M tal que

$$M^{-1} A M = B.$$

Ex. A é diagonalizável $\Leftrightarrow$ A é semelhante a uma matriz diagonal.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$

$M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} A M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$\therefore$ A e B são semelhantes.

$$\boxed{\text{Duas matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores}}$$

Na verdade, se A e B são semelhantes, então A e B têm o mesmo polinômio característico:

$$B = M^{-1} A M$$

$$\begin{aligned}
p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\
&= \det(M^{-1} A M - \lambda I) \\
&= \det\left(M^{-1}(A - \lambda I) M\right) \\
&= \underbrace{\cancel{\det(M^{-1})}}_{=(\det M)^{-1}} \det(A - \lambda I) \cancel{\det(M)} \\
&= \det(A - \lambda I) \\
&= p_A(\lambda)
\end{aligned}$$

—//—

Mesmo que A e B tenham os mesmos autovalores, não precisam ser semelhantes.

Ex. $A = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Autovalores $\quad 0, 0 \quad\quad 0, 0$

$M^{-1}AM = 0 \neq B$ $\quad$ B não é semelhante a A.
$\forall M$

—"—

Toda transformação linear é representada por uma matriz em relação a uma base.

Dados:
$\mathcal{B}$: $v_1, \dots, v_n$ base de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$)

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformação linear

$$\begin{cases} T(u+u') = Tu + Tu' \\ T(\lambda u) = \lambda Tu \end{cases}$$

$$Tv_j = a_{1j} v_1 + \dots + a_{nj} v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Tv_1 & \dots & Tv_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = [T]_{\mathcal{B}}$$

$x \in \mathbb{R}^n$

$$x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x)_{\mathcal{B}}$$

$$Tx = x_1 Tv_1 + \dots + x_n Tv_n$$
$$= x_1 \sum_{i=1}^{n} a_{i1} v_i + \dots + x_n \sum_{i=1}^{n} a_{in} v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n) v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) v_i \equiv$$

$$(Tx)_B = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (T)_B (x)_B$$

$$\therefore \boxed{(Tx)_B = (T)_B (x)_B}$$

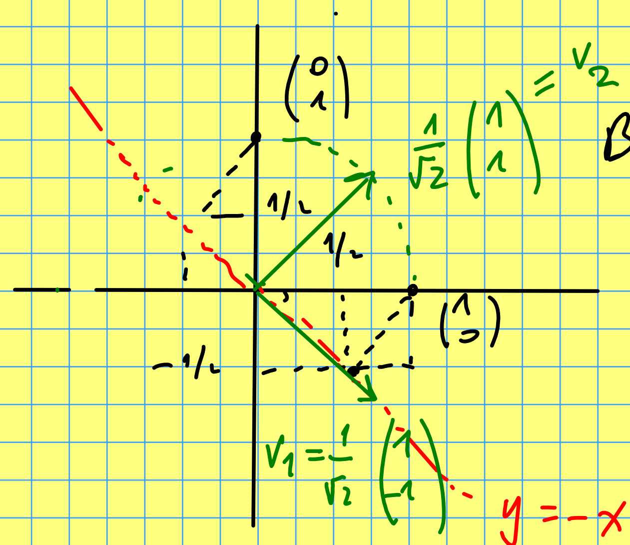
Outra base B': $v_1', \dots, v_n'$

$$(Tx)_{B'} = (T)_B (x)_B$$

Qual é a relação entre $(T)_B$ e $(T)_{B'}$?

São semelhantes!

Ex. $\mathbb{R}^2$ $\quad T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a projeção ortogonal sobre a reta $y = -x$.



Base canônica

$B: \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Te_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad Te_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$= 1/2 e_1 + (-1/2) e_2 \qquad -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$

$$A = (T)_B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1/2 \\ 1/2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$ é simétrica

$B' : v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$

$Tv_2 = 0 \qquad Tv_1 = v_1 = 1\, v_1 + 0\, v_2$

$B = (T)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é diagonal.

Seja $M = R_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M A M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ +1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$B = M A M^{-1}$$

$$(T)_{B'} = M (T)_B M^{-1}$$

M é a matriz de mudança de base

$$B' : v_1, v_2 \underset{R_{\pi/4} = M}{\overset{R_{-\pi/4} = M^{-1}}{\rightleftarrows}} B : e_1, e_2$$