MATRIZES COMPLEXAS, HERMITEANAS E UNITÁRIAS

08/07/21

(Sempre matrizes quadradas)

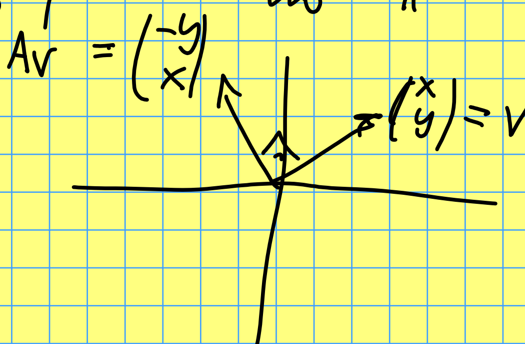
$$x^2 + 1 = 0 \qquad x = \pm i$$

antihorário $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

-n-

Exemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Rotação de 90° no $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



$$v^t A v = (x \ y) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = -xy + xy = 0 \quad \therefore \quad Av \perp v$$

$$\|Av\|^2 = (-y)^2 + x^2 = x^2 + y^2 = \|v\|^2 \quad \therefore \quad \|Av\| = \|v\|$$

Autovalores de $A = ?$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ +1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

As raízes são $\pm i$.

Autovetores

$\boxed{\lambda = i}$ $N(A - iI) = ?$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\cancel{-ix - y = 0}$

$\boxed{x - iy = 0} \times i$

$ix + i(-i)y = 0 \qquad i^2 = -1$

$ix - (-1)y = 0$

$ix + y = 0$

$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ é um autovetor

$\boxed{\lambda = -i}$

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$ix - y = 0$

$x + iy = 0$

$\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ é autovetor

matriz complexa, não real.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AS = S\Lambda \qquad A = S\Lambda S^{-1} \qquad S^{-1}\Lambda S = A$$

$\therefore$ A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$

(apesar de A ser uma matriz real).

—//—

Números complexos $\mathbb{C}$

$z = a + ib \qquad a, b \in \mathbb{R}$

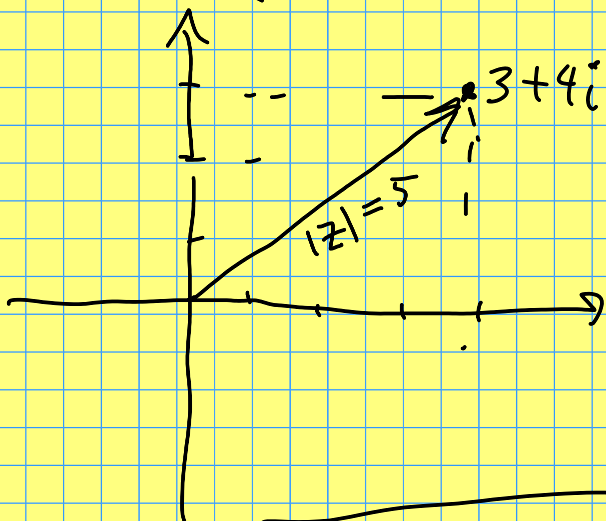
$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

$$z \cdot z' = (a+ib)(a'+ib') \qquad i^2 = -1$$

$$= aa' + (ib)a' + a(ib') + (ib)(ib')$$

$$= aa' + i(ba') + i(ab') + \underbrace{i^2}_{=-1} bb'$$

$$= (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$



$z = x + iy$

$x = \mathrm{Re}\, z$ parte real

$y = \mathrm{Im}\, z$ " imaginária

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \underbrace{(x+iy)}_{=z}\underbrace{(x-iy)}_{\bar{z}}$$

$$x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$$

$\bar{z}$ conjugado complexo de z

$$= z\bar{z}$$

$$\mathbb{C}^n \qquad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \qquad z_j = x_j + i y_j$$

$$\|z\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$$

$$= \bar{z}_1 z_1 + \dots + \bar{z}_n z_n$$

$x^t y$

"Produto ~~escalar~~ complexo"

`Produto Hermitiano

$z, w \in \mathbb{C}^n$.

$$\bar{z}^t w = (\bar{z}_1 \dots \bar{z}_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \bar{z}_1 w_1 + \dots + \bar{z}_n w_n$$

$z = w$: $\bar{z}^t z = \|z\|^2$

Ex. $z = \begin{pmatrix} 1+3i \\ i \end{pmatrix}$ $\quad \|z\|^2 = |1+i|^2 + |3i|^2$

$$= 1 + 1 + 9 = 11$$

—//—

Matrizes reais simétricas : $A = A^t$

Matrizes ortogonais : $AA^t = I$

A é invertível e $A^{-1} = A^t$

A preserva comprimentos e ângulos

$x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad (Ax)^t Ay = (x^t A^t) Ay$

A ortogonal $\quad = x^t \underbrace{(A^t A)}_{= I} y$

$$= x^t y$$

A preserva o produto escalar : o prod esc de Ax, Ay é igual ao do x, y

Ex. $A = \underset{\text{rotação}}{R_\theta}$ em $\mathbb{R}^2$

$$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta} = (R_\theta)^t$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^t$$

Seja A uma matriz simétrica (real).
Então autovetores de A associados a autovalores diferentes são ortogonais.

Suponhamos que $Au = \lambda u$, $Av = \mu v$ onde $\lambda \neq \mu$

$$(\lambda u^t)v = (\lambda u)^t v = (Au)^t v = (u^t \underbrace{A^t}_{=A})v$$

$$= u^t(Av) = u^t(\mu v)$$

$$\lambda(u^t v) = \mu(u^t v)$$

$$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}(u^t v) = 0 \quad \therefore \quad u^t v = 0 \quad u \perp v$$

TEOREMA ESPECTRAL PARA MATRIZES SIMÉTRICAS REAL

Toda matriz simétrica real é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.
De fato, existe uma base de autovetores que é ortonormal.

—//—

TEOREMA ESPECTRAL PARA MATRIZES HERMITIANAS

Toda matriz Hermitiana é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$. De fato, existe uma base de autovetores que é ortonormal (em relação ao produto Hermitiano).

Def. Uma matriz complexa A é dita <u>Hermitiana</u> se $\bar{A}^t = A$.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$ é Hermitiana.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3+3i \\ 3-3i & 5 \end{pmatrix} \quad \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} = A$$

Notação $A^H := \bar{A}^t$ ou $A^* := \bar{A}^t$

Propriedades de matrizes Hermitianas

$$\boxed{\text{Se } A \text{ é uma matriz Hermitiana, então todo autovalor de } A \text{ é um número real}}$$

Suponhamos que $Av = \lambda v$. Então, calculando o produto Hermitiano de v com Av:

$v \in \mathbb{C}^n$

$$\bar{v}^t A v = \lambda \bar{v}^t v = \lambda \|v\|^2$$

$$\therefore \overline{\bar{v}^t A v} \overset{\star}{=} \overline{\lambda \|v\|^2}.$$

$\overline{z.w} = \bar{z}\,\bar{w}$

$z, w \in \mathbb{C}$

Tomando o conjugado complexo:

($\|v\|$ é real)

$$\bar{\bar{v}}^t \bar{A} \bar{v} = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

$$= \left[v^t \bar{A} \bar{v} \right.$$

$(\ldots)_{1\times n} \left(\quad\right)_{n\times n} \left(\vdots\right)_{n\times 1} \quad (\cdot)_{1\times 1}$

$$= \left[(v^t \bar{A} \bar{v})^t = \bar{v}^t \bar{A}^t (v^t)^t \quad (\bar{A}^t = A) \right.$$

$$= \bar{v}^t A v$$

$$\overset{\star}{=} \lambda \|v\|^2$$

$\Rightarrow \bar{\lambda} \|v\|^2 = \lambda \|v\|^2$ e como $v \neq 0 \therefore \lambda = \bar{\lambda}$

Ou seja $\lambda \in \mathbb{R}$

Se A é uma matriz Hermitiana, então dois autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais (em rel ao produto Hermitiano)

Def. Uma matriz complexa U é dita *unitária* se $UU^* = I$ $\quad (U\bar{U}^t = I)$

SUMÁRIO (§ 5.4, final)

REAL × COMPLEXO

REAL	COMPLEXO
$\mathbb{R}^n \quad (x_1, \dots, x_n) = x$	$\mathbb{C}^n \quad (z_1, \dots, z_n) = z$
$\lVert x \rVert^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$	$\lVert z \rVert^2 = \lvert z_1 \rvert^2 + \dots + \lvert z_n \rvert^2$
$A = (a_{ij}) \Rightarrow A^t = (a_{ji})$	$A^* = (\overline{a_{ji}}) = \bar{A}^t$
$(AB)^t = B^t A^t$	$(AB)^* = B^* A^*$
Prod escalar	Prod Hermitiano
$x^t y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$	$z^* w = \bar{z}^t w = \bar{z}_1 w_1 + \dots + \bar{z}_n w_n$
$(Ax)^t y = x^t (A^t y)$	$(Az)^* w = z^* (A^* w)$
Matrizes simétricas	Matrizes Hermitianas
$A^t = A$	$A^* = A$
Ortogonalidade	Ortogonalidade
$x^t y = 0$	$z^* w = 0$
Matrizes ortogonais	Matrizes unitárias
$Q^t Q = Q Q^t = I$ ou $Q^t = Q^{-1}$	$U^* U = U U^* = I$ ou $U^* = U^{-1}$
$(Qx)^t Qy = x^t y$ e $\lVert Qx \rVert = \lVert x \rVert$	$(Uz)^* (Uw) = z^* w$ e $\lVert Uz \rVert = \lVert z \rVert$

$A = A^t \Rightarrow Q^{-1}AQ = \Lambda$ (Λ real)

Teor Espectral

$A = A^* \Rightarrow U^{-1}AU = \Lambda$ (Λ real)

—//—

- Diagonalização X Mudança de coordenadas
- Teor. Espectral
- Exemplos
- Aplicação à Geometria

—//—

$A = A^*$ (A é Hermiteana)

v é autovetor de A com autovalor λ $\Rightarrow$ λ é real ?

$\lambda = \bar{\lambda}$

Obs. • $\overbrace{\underset{1\times n}{v^*}\,\underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{v}}^{1\times 1}$ é um número, $\leftarrow$ matriz 1×1

portanto é igual à sua transposta:

$$v^*Av = (v^*Av)^t$$

• v^*Av é um número real

$$\overline{v^*Av} = \overline{(v^*Av)^t} = (v^*Av)^*$$

$$= v^* A^* (v^*)^* \qquad A^* = A$$

$$= v^* A v$$

ou seja, $\boxed{\overline{v^*Av} = v^*Av}$

- Usando que $Av = \lambda v$:

$$\underbrace{v^*Av}_{\in \mathbb{R}} = v^*(\lambda v) = \lambda(v^*v) = \lambda \|v\|^2$$

Como $v \neq 0$, temos $\|v\| \neq 0$, e portanto:

$$\lambda = \frac{v^*Av \leftarrow \text{real}}{\|v\|^2 \leftarrow \text{real}} \quad \text{é real} \quad //$$