DIAGONALIZAÇÃO DE UMA MATRIZ

01/07/21

Def. Uma matriz A $n \times n$ é **diagonalizável** se existe uma matriz invertível S tal que

$$S^{-1} A S = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

é uma matriz diagonal.

Neste caso, os elementos de Λ serão chamados os **autovalores** de A, e as colunas de S serão os chamados **autovetores** de A.

Obs. Nem toda matriz é diagonalizável (já veremos um exemplo), mas nós temos:

$$\boxed{\text{Se a matriz } n \times n \ A \text{ tem } n \text{ autovetores L.I. então } A \text{ é diagonalizável.}}$$

Dem. $v \neq 0$ é chamado de **autovetor** de A se $Av = \lambda v$ para algum escalar λ. Neste caso, λ é chamado de **autovalor** de A associado ao autovetor v.

Suponhamos que A tem n autovetores L.I.:

$v_1, v_2, \ldots, v_n$

Então $Av_1 = \lambda_1 v_1, \ldots, Av_n = \lambda_n v_n$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores respectivos

Seja
$$S = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$
(e S é $n \times n$)

Como as colunas de S são LI por hipótese, S é uma matriz invertível.

$$AS = A\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= S\Lambda$$

onde $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, ou seja,

$AS = S\Lambda$.

E como S é invertível,

$$A = S\Lambda S^{-1} \quad \text{ou} \quad S^{-1}AS = \Lambda \quad //$$

—//—

Exemplo. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ não é diagonalizável!

1.º método Quais são os autovalores de A?

Polinômio característico

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2$$

Suas raízes são os autovalores : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

(0 autovalor de multiplicidade 2)

Se A fosse diagonalizável, então

$$A = S\Lambda S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = 0 \quad \underline{\text{Absurdo}}!$$

Então A não pode ser diagonalizável.

2º método: Já sabemos que os autovalores de A são $0, 0$. Calculemos agora os autovetores.

v é um autovetor de A associado ao autovalor λ ($v \neq 0$) $\iff Av = \lambda v$

$$\iff (A - \lambda I)v = 0$$

$$\iff v \in N(A - \lambda I)$$

Ou seja, os autovetores de A assoc. a λ são os elementos não-nulos do espaço nulo de $A - \lambda I$.

$N(A - \lambda I)$: autoespaço de A associado ao autovalor λ

No nosso caso, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, então o autoespaço associado a 0 é $N(A - 0I) = N(A)$.

$$v \in N(A) \iff Av = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ Portanto $v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Não existem 2 autovetores LI de A,
pois são todos múltiplos de $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$\therefore$ Não é possível construir S.

$\boxed{\text{O problema é a falta de autovetores LI}}$.

—//—

Ex. $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = I$

Os autovalores de A são 1 com multiplicidade 2.

$S = I$.

$$S^{-1} A S = I^{-1} . I \; I = I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \Lambda$$

Na verdade, A já é diagonal. Toda matriz diagonal é diagonalizável.

$$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Obs. Se $\underset{n \times n}{A}$ é diagonalizável, então A tem n autovetores LI (que são as colunas da S)

Conclusão importante:

| Uma matriz $n \times n$ A é diagonalizável se e somente

se A tem n autovetores L.I.,

Seja A uma matriz $n\times n$. Se os autovalores de A são distintos dois a dois (i.e. têm multiplicidade 1), então A tem n autovetores LI (e logo, A é diagonalizável).

<u>Dem</u> Suponhamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A, com autovetores $v_1, \dots, v_n$, resp.

Considere uma relação linear

$\alpha_1 v_1 = 0$, $v_1 \neq 0$

$$\times \lambda_1 \rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = A(0)$$

$$\alpha_1 \underbrace{Av_1} + \alpha_2 \underbrace{Av_2} + \dots + \alpha_n \underline{Av_n} = 0$$

$$\alpha_1 \cancel{\lambda_1 v_1} + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n = 0$$

$$-\quad \cancel{\lambda_1 \alpha_1 v_1} + \lambda_1 \alpha_2 v_2 + \dots + \lambda_1 \alpha_n v_n = 0$$

$$\alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0,\ \text{por hip}} v_2 + \dots + \alpha_n \underbrace{(\lambda_n - \lambda_1)}_{\neq 0,\ \text{por hip}} v_n = 0$$

$$\beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n = 0$$

—//—

<u>$n = 2$:</u> $\rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \quad \times \lambda_1$

$$\alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2 = 0$$

$$\cancel{\alpha_1 \lambda_1 v_1} + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0$$

$$\cancel{\alpha_1 \lambda_1 v_1} + \alpha_2 \lambda_1 v_2 = 0 \quad -$$

$$\alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{v_2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0}$$

$$\alpha_1 v_1 + \overset{0}{\cancel{\alpha_2}} v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \underbrace{v_1}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$$

—//—

§ 5.2

<u>Ex. 3</u> Calcular os autovalores e autovetores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e diagonalizar A de duas maneiras diferentes.

<u>Resolução</u>.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^3 + 1 + 1 - 3(1-\lambda) = \cancel{1} - \cancel{3\lambda} + 3\lambda^2 - \lambda^3 + \cancel{2} - \cancel{3} + \cancel{3\lambda}$$

$= \lambda^2 (3-\lambda)$ Autovalores de A : 0, 0, 3

$\boxed{\lambda = 3}$ $N(A-3I) = ?$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\times 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\times 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cancel{3}\,1 & \cancel{-3}\,-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x = y = z$

$$N(A-3I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\boxed{\lambda = 0}$ $N(A) = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x + y + z = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$N(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\dim N(A) = 2$

$=$ multiplicidade de 0

$\therefore \exists$ 2 autovetores L.I. associados a 0

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

é inversível pois tem colunas L.I.

$\lambda = 3$ $\lambda = 0$

$$S^{-1} A S = \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (S')^{-1} A S' = \Lambda$$

$\lambda = 3$ $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

são duas bases diferentes de $N(A)$

$$S'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ \underbrace{-2 \quad 0}_{\lambda=0} & & \underbrace{2}_{\lambda=3} \end{pmatrix} \qquad (S'')^{-1} A S'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Ex.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é diagonalizável.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Autovalores: $1, 1$

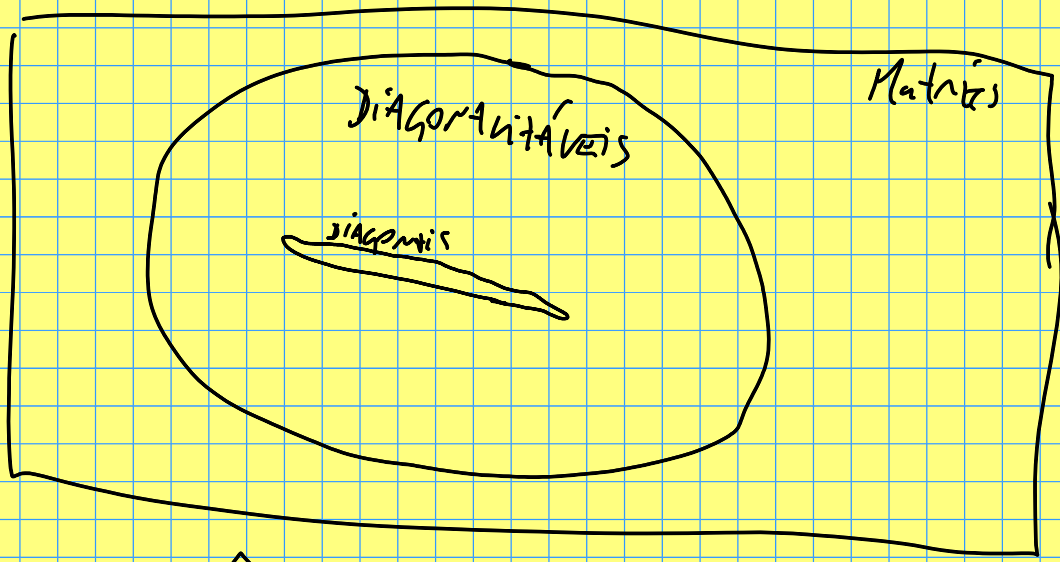
Autoespaço assoc. a 1: $N(A-I)$

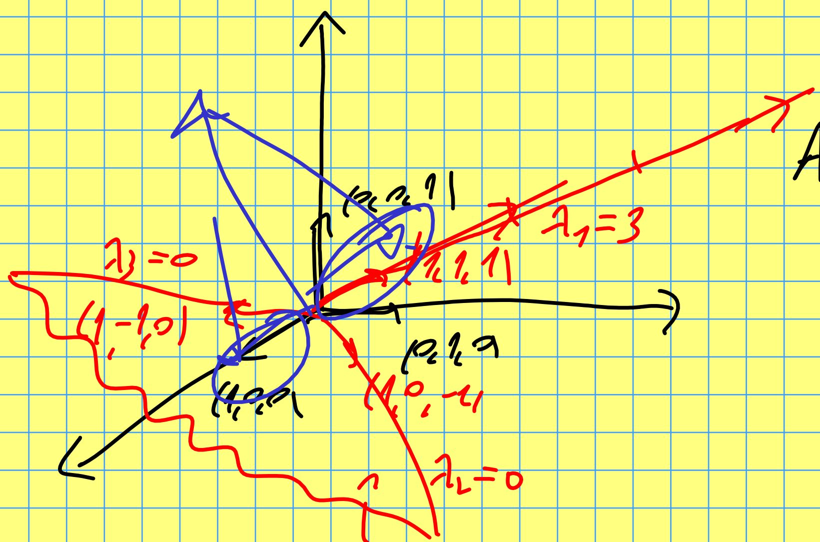
$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{N(A-I)}_{\dim 1} = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Não existem autovetores em número suficiente.
LI

—·—

A é invertível $\Leftrightarrow$ 0 não é autovalor de A





$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{N(A)}$