Desigualdade de Cauchy-Schwarz

17/06/21

$\mathbb{R}^n \ni x, y$

$$x^t y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$= \|x\| \|y\| \cos\theta \qquad \theta = \measuredangle(x,y)$$

Notemos que

$$|\cos\theta| \leq 1 \qquad (\because -1 \leq \cos\theta \leq 1)$$

$$\Rightarrow |x^t y| = \|x\| \|y\| |\cos\theta| \leq \|x\| \|y\|$$

$$\therefore \boxed{|x^t y| \leq \|x\| \|y\|}$$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$(x^t y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

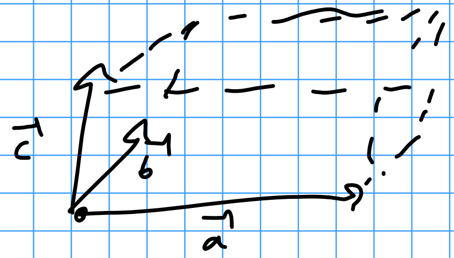
—//—

DETERMINANTES (Cap. 4)

- Critério para invertibilidade de uma matriz.

  A é invertível $\iff \det A \neq 0$

- Serve para calcular volumes de paralelepípedos n-dimensionais



$$\text{Volume} = \left| \det \begin{pmatrix} - \vec{a} - \\ - \vec{b} - \\ - \vec{c} - \end{pmatrix} \right|$$

- Determinante $= \pm$ produto dos pivôs
- Regra de Cramer

—//—

Queremos que o determinante de uma matriz $n \times n$ tenha as seguintes propriedades:

P1. det A é linear em <u>cada</u> coluna de A

$$\det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 + u_1' & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1' & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Isto <u>não</u> é:

$$\cancel{\det(A+B) = \det A + \det B}$$

$$\det(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

$$\det(u_1 + u_1', u_2, \ldots, u_n) = \det(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \det(u_1', u_2, \ldots, u_n)$$

$$\det(\alpha u_1, u_2, \ldots, u_n) = \alpha \det(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

Isto <u>não</u> é $\det(\alpha A) = \alpha \det A$

<u>Exs.</u>

$$\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

P2. $\det A$ troca de sinal se duas colunas de A são permutadas.

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ u_2 & u_1 & u_3 & \cdots & u_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$$

P3. $\det I = +1$

—//—

<u>Exemplo</u>. Matrizes 2×2.

Dada

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$ como calcular $\det A$?

<u>1.º caso</u> $a = c = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Transf lin calculada no vetor nulo dá o vetor nulo

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} \end{pmatrix} = 0$$

Caso geral

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b \\ 0+c & d \end{pmatrix}$$

P1

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a & b+0 \\ 0 & 0+d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & b+0 \\ c & 0+d \end{pmatrix}$$

$$\overset{P1}{=} \underbrace{\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0\ (*)} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}_{=ad} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}}_{=-bc} + \underbrace{\det \overset{(*)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}}}_{=0}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a.1 & 0 \\ a.0 & d \end{pmatrix} \overset{P1}{=} a \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= a \det \begin{pmatrix} 1 & d.0 \\ 0 & d.1 \end{pmatrix} \overset{P1}{=} ad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{P3}{=} ad.1 = ad$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \overset{P2}{=} -\det \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = -bc$$

cálculo acima

(*) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ?$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a.1 & b \\ a.0 & 0 \end{pmatrix} \overset{P1}{=} a.\det\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a.\det\begin{pmatrix} 1 & b.1 \\ 0 & b.0 \end{pmatrix} \overset{P1}{=} ab\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Mas $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{P2}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Similarmente $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = 0$

De (*), vem: $\boxed{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc}$

— // —

Impomos P1, P2, P3 ao determinante e vamos deduzir outras propriedades.

P4. Se A tem 2 colunas iguais, então $\det A = 0$

$$\det\begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ u_1 & u_1 & u_3 & \cdots & u_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} \overset{P2}{=} -\det\begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ u_1 & u_1 & u_3 & \cdots & u_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ u_1 & u_1 & u_3 & \cdots & u_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} = 0$$

P5. Subtraindo um múltiplo de uma coluna de outra coluna deixa o determinante inalterado.

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ u_1 - k u_2 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

De fato:

$$\det \begin{pmatrix} u_1 - k u_2 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \overset{P1}{=} \det(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) + \boxed{\det(-k u_2, u_2, u_3, \ldots, u_n)}$$

$$\overset{P1}{=} -k \det(u_2, u_2, u_3, \ldots, u_n)$$

$$\overset{P4}{=} 0$$

P6. Se A tem uma coluna de zeros, então $\det A = 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0+0 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{P1}{=} \det(0\ u_2, \dots, u_n) + \det(0, u_1, \dots, u_n)$$

$$\Rightarrow \det(0\ u_2 \dots u_n) = 0$$

P7. Se A é triangular (superior ou inferior) então $\det A$ é o produto dos coeficientes diagonais.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} =$$

Se os coeficientes diagonais são não-nulos:

$$\overset{P5}{=} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{11} & a_{13} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{11} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} 0 & a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} 0 \\ 0 & 0 - \frac{a_{12}}{a_{11}} 0 & a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}} 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\overset{P5}{=} \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 - \frac{a_{23}}{a_{22}} 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} - \frac{a_{23}}{a_{22}} a_{22} \\ 0 & 0 & a_{33} - \frac{a_{23}}{a_{22}} 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\overset{P1}{=} a_{11}a_{22}a_{33} \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=1} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Por outro lado, se algum dos elementos diagonais for nulo, em algum momento desse processo, teremos uma coluna de zeros.

Então, por P6, $\det A = 0 = a_{11}a_{22}a_{33}$

P8. Se A é singular (não-inversível), então $\det A = 0$. Se A é inversível, então $\det A \neq 0$ e $\det A = \pm$ produto dos pivôs

Se A é singular, então $N(A) \neq 0$.

Isso quer dizer que as colunas são LD, logo, uma coluna de A é combinação linear das demais.

$$\det\begin{pmatrix} \alpha u_2+\beta u_3 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \overset{P1}{=} \alpha \det\begin{pmatrix} \underbrace{u_2 \; u_2} & u_3 \end{pmatrix} + \beta \det\begin{pmatrix} \underbrace{u_3 \; u_2 \; u_3} \end{pmatrix}$$

$$\overset{P4}{=} \alpha . 0 + \beta . 0$$

$$= 0$$

$\therefore \det A = 0$

P9. O determinante é <u>multiplicativo</u>, isto é, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

P10. $\det A = \det A^t$