MATRIZES ORTOGONAIS

15/06/21

(§3.4)

$\mathbb{R}^n$

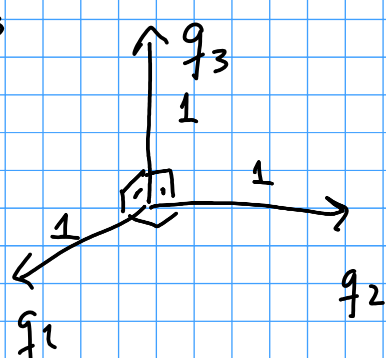
Def. Uma base ortonormal é uma base $q_1, \dots, q_n$ tal que:

$$q_i^t q_j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

$i=j$: $q_i^t q_i = \|q_i\|^2 = 1$ $\quad q_i$ são vetores unitários

$i \neq j$: $q_i^t q_j = 0 \quad q_i \perp q_j \quad q_i$ e q_j são ortogonais

$\mathbb{R}^3$



$$Q = \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Ex. A base canônica de $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

é claramente ortonormal.

Neste caso $Q = I$ (matriz identidade)

<u>Def.</u> Uma matriz $m \times n$ é chamada de <u>ortogonal</u> se Q tem colunas ortonormais:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} — & q_1^t & — \\ & \vdots & \\ — & q_n^t & — \end{pmatrix}}_{n \times m} \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{m \times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{n \times n} = I_n$$

posição (i,j)

$$q_i^t q_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Q é uma matriz ortogonal se e somente se $Q^t Q = I$.

Se Q é quadrada e ortogonal, então $Q^t = Q^{-1}$.

<u>Ex.</u> $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta$ rotação do $\mathbb{R}^2$ de ângulo θ no sentido anti-hor

$$Q^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_{-\theta} = Q^{-1}$$

Q é ortogonal.

Ex. Matrizes de permutação

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

As colunas de P são ortonormais: e_3, e_1, e_2

$$P^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^tP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P é ortogonal.

—//—

<u>Multiplicação por uma matriz ortogonal preserva o comprimento</u>

$x \in \mathbb{R}^n \qquad Q \quad n \times n$ ortogonal

$$\Rightarrow \quad \|Qx\|^2 = (Qx)^t(Qx)$$

$$= (x^tQ^t)(Qx)$$

$$= x^t \underbrace{(Q^tQ)}_{=I} x$$

$$= x^t x$$

$$= \|x\|^2$$

$$\therefore \|Qx\| = \|x\| \,//.$$

—//—

Seja $q_1, \dots, q_n$ uma base ortonormal.

Sendo uma base, todo vetor b se escreve

$$b = x_1 q_1 + \dots + x_n q_n . \qquad (1)$$

Como a base é o.n., existe uma maneira simples de calcular os coeficientes $x_1, \dots, x_n$

Multipliquemos ambos os membros da eq. (1) por q_1^t:

$$q_1^t b = x_1 \underbrace{(q_1^t q_1)}_{= \|q_1\|^2 = 1} + x_2 \underbrace{(q_1^t q_2)}_{=0} + \dots + x_n \underbrace{(q_1^t q_n)}_{=0}$$

$$= x_1$$

Analogamente, multiplicando (1) por q_j^t, obtemos

$$q_j^t b = x_j .$$

Logo,

$$\boxed{b = (q_1^t b) q_1 + \dots + (q_n^t b) q_n}$$

para todo $b \in \mathbb{R}^n$.

Em notação matricial:

$$x_1 q_1 + \dots + x_n q_n = b \iff \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\iff Qx = b$$

$$\iff x = Q^{-1} b$$

$$\iff x = Q^t b$$

—//—

$$b = (q_1^t b) q_1 + \dots + (q_n^t b) q_n$$

$$= \underbrace{\left(\frac{q_1^t b}{q_1^t q_1}\right) q_1}_{} + \dots + \underbrace{\left(\frac{q_n^t b}{q_n^t q_n}\right) q_n}_{}$$

$$= \mathrm{proj}_{q_1} b + \dots + \mathrm{proj}_{q_n} b$$

Pitágoras:

$$\|b\|^2 = \|(q_1^t b) q_1\|^2 + \dots + \|(q_n^t b) q_n\|^2$$

$$= (q_1^t b)^2 \underbrace{\|q_1\|^2}_{=1} + \dots + (q_n^t b)^2 \underbrace{\|q_n\|^2}_{=1}$$

$$= (q_1^t b)^2 + \dots + (q_n^t b)^2$$

—//—

Se Q é quadrada e ortogonal, então $Q^t = Q^{-1}$. Portanto

$Q^t Q = I$ e $Q Q^t = I$.

$\Updownarrow$ Q tem colunas ortonormais

$\Updownarrow$ Q tem linhas ortonormais

Ex. $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

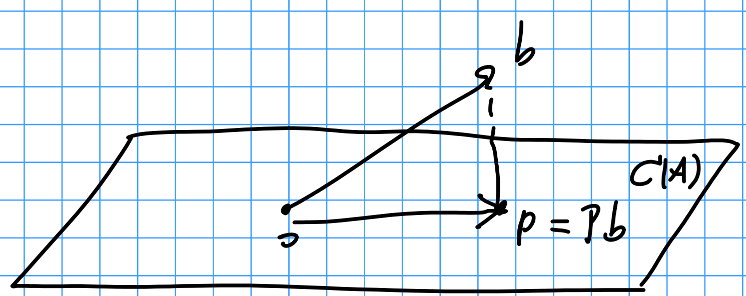
é ortogonal. (Verificar!)

—//—

Método dos mínimos quadrados com colunas ortonormais

$Ax = b$ A retangular

$b \notin C(A)$: $\nexists$ solução (exata)



Pb : projeção ortogonal de b em C(A)

$A\hat{x} = p$ $\hat{x}$: solução aproximada de $Ax=b$

Método: $A^tA\hat{x} = A^t b$ (2)

A posto máximo $\Leftrightarrow$ A^tA é invertível

$$\hat{x} = (A^tA)^{-1}A^t b \qquad (3)$$

$$p = A\hat{x} = \underbrace{A\ (A^tA)^{-1}\ A^t}_{P} b = Pb. \qquad (4)$$

Agora, no caso $A = Q$, uma matriz ortogonal:

(2) e (3) $\quad \underbrace{Q^tQ}_{=I}\hat{x} = Q^t b \Rightarrow \hat{x} = Q^t b$

(4) $\quad p = Q\hat{x} = \underbrace{QQ^t}_{=P} b$

$\therefore$ A projeção ortogonal sobre as colunas de uma matriz ortogonal $m\times n$ Q é

$$P = QQ^t.$$

Ex. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C(Q)$ é o plano xy no $\mathbb{R}^3$

$$P = QQ^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

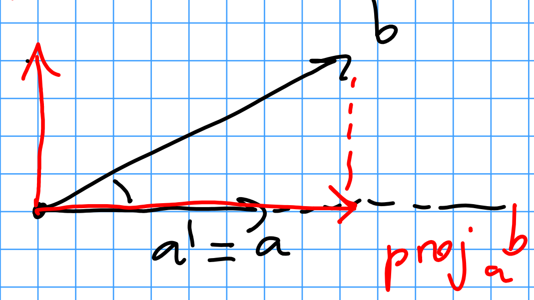
— 1 —

O Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt

$$\boxed{\text{Base arbitrárias}} \xrightarrow[\text{Algoritmo de G-S}]{} \boxed{\text{Bases ortonormais}}$$

Dada uma base a, b, c de $\mathbb{R}^3$, vamos inicialmente torná-la ortogonal.

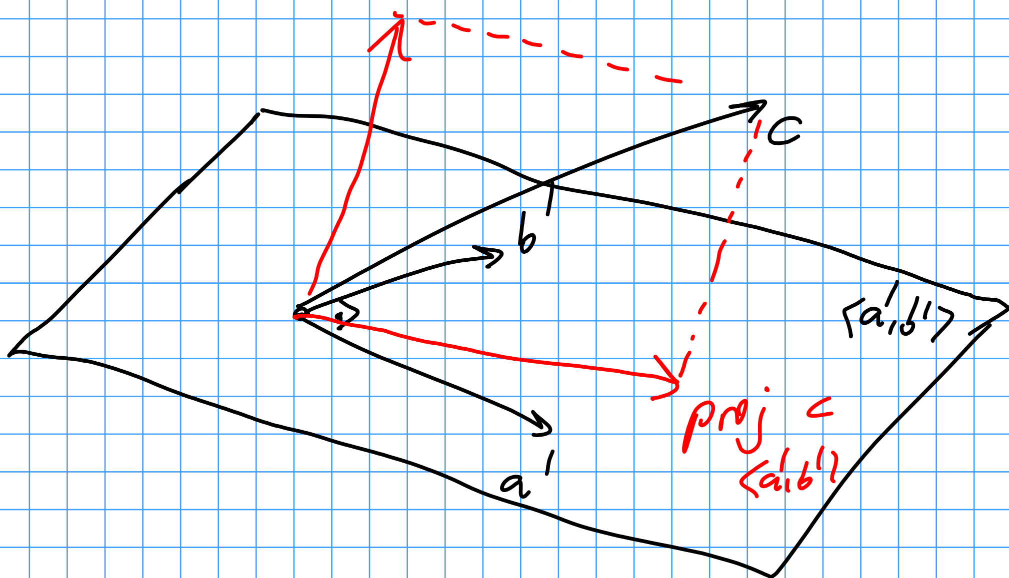
$b' := b - \operatorname{proj}_a b$



Agora a', b' são ortogonais.

O segundo passo é tornar o terceiro vetor ortogonal aos dois primeiros.

$$c' := c - \operatorname{proj}_{\langle a',b'\rangle} c$$



Agora a', b', c' é um conjunto ortogonal.

O último passo é normalizá-lo:

$$q_1 = \frac{a'}{\|a'\|}, \quad q_2 = \frac{b'}{\|b'\|}, \quad q_3 = \frac{c'}{\|c'\|}$$

Em fórmulas mais explícitas:

$$a' = a$$

$$b' = b - \operatorname{proj}_{a'} b = b - \frac{b^t a'}{a'^t a'} a'$$

$$c' = c - \operatorname{proj}_{\langle a',b'\rangle} c$$

a', b' são ortogonais

$$= c - \left(\mathrm{proj}_{a'} c + \mathrm{proj}_{b'} c \right)$$

$$= c - \frac{c^t a'}{a'^t a} a' - \frac{c^t b'}{b'^t b} b'$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} a' &= a \\ b' &= b - \frac{b^t a'}{a'^t a'} a' \\ c' &= c - \frac{c^t a'}{a'^t a'} a' - \frac{c^t b'}{b'^t b'} b' \end{aligned}}$$

Em $\mathbb{R}^4$: $\quad d' = d - \dfrac{d^t a'}{a'^t a'} a' - \dfrac{d^t b'}{b'^t b'} b' - \dfrac{d^t c'}{c'^t c'} c'$

etc.

$$q_1 = \frac{a'}{\|a'\|}$$

$$q_2 = \frac{b'}{\|b'\|}$$

$$q_3 = \frac{c'}{\|c'\|}$$

<u>Ex.</u> Apliquemos o algoritmo de G-S à base $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a' = a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|a'\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|b'\| = \sqrt{1/4+1/4} = 1/\sqrt{2}$$

$$b' = b - \frac{b^t a'}{a'^t a'} a' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$c' = c - \frac{c^t a'}{a'^t a'} a' - \frac{c^t b'}{b'^t b'} b' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1/2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = \frac{a'}{\|a'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ é ortogonal //}$$

A FATORAÇÃO $A = QR$

Dada uma matriz A $m \times n$ $(m \geq n)$ com posto máximo (colunas L. I.), podemos escrever $A = QR$, onde Q é uma matriz com colunas ortogonais e R é triangular superior e invertível.

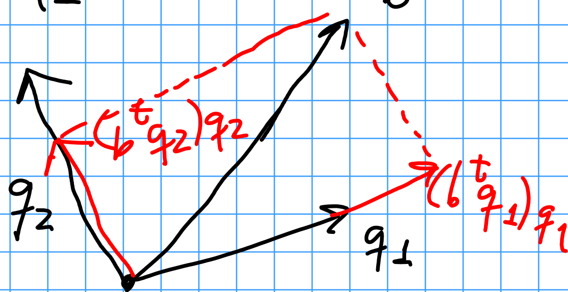
$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$a' = a \qquad q_1 = \frac{a'}{\|a'\|}$$

$$b' = b - \mathrm{proj}_{a'} b = b - \mathrm{proj}_{q_1} b$$

$$\| \quad (b^t q_2) q_2$$

$$= b - (b^t q_1) q_1$$



$$q_2 = \frac{b'}{\|b'\|}$$

$$c' = c - \mathrm{proj}_{a'} c - \mathrm{proj}_{b'} c$$

$$= c - \mathrm{proj}_{q_1} c - \mathrm{proj}_{q_2} c$$

$$= c - (c^t q_1) q_1 - (c^t q_2) q_2$$

Então: $a = (q_1^t a) q_1$

$$b = (q_1^t b) q_1 + (q_2^t b) q_2$$

$$c = (q_1^t c) q_1 + (q_2^t c) q_2 + (q_3^t c) q_3$$

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{q_1^t a} & q_1^t b & q_1^t c \\ 0 & \overset{\neq 0}{q_2^t b} & q_2^t c \\ 0 & 0 & \overset{\neq 0}{q_3^t c} \end{pmatrix}$$

$$\underset{m\times n}{} = \underset{m\times n}{Q} \cdot R$$

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{Q} \cdot R \leftarrow n\times n$$

n vetores L.I. do $\mathbb{R}^m$ — n vetores o.n. de $\mathbb{R}^m$

Método dos mínimos quadrados revisitado

$Ax = b$ não tem solução

$b \notin C(A)$ (A colunas L.I. (*))

$p = Pb$ P: proj. ortog de b sobre $C(A)$

$A\hat{x} = p$ $\hat{x}$: solução aprox. de $Ax = b$

$$\boxed{A^t A \hat{x} = A^t b}$$

Entremos com a fatoração $A = Q.R$:

$$(QR)^t (QR)\hat{x} = (QR)^t \cdot b$$

$$R^t \underbrace{Q^t Q}_{=I} R \hat{x} = R^t Q^t b$$

$$R^t R \hat{x} = R^t Q^t b$$

$$(R^t)^{-1} R^t R \hat{x} = (R^t)^{-1} R^t Q^t b$$

$$\therefore R\hat{x} = Q^t b$$

É fácil de resolver, pois R é triangular