PROJEÇÕES ORTOGONAIS 10/06/21

$A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ $(m \geq n)$ posto$(A) = n$

$P_A :=$ a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^m$ sobre $C(A) \subset \mathbb{R}^m$

Então $\boxed{P_A = A(A^tA)^{-1}A^t}$

—//—

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

posto(A) = posto-coluna(A)

= nº máximo de colunas LI de A

posto$(A) = n \Leftrightarrow$ Todas as colunas de A são LI

$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$

$$\underset{\dim n}{C(A)} \subset \underset{\dim m}{\mathbb{R}^m}$$

$\therefore n \leq m$

$C(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ $v_1, \ldots, v_n$ base de $C(A)$

$\dim C(A) = n$

<u>Obs</u> A^tA é invertível, pois posto$(A) = n$, isto é, A tem posto máximo.

De fato:

posto(A) + nulidade (A) = nº colunas de A

n + nulidade(A) = n

$\Rightarrow$ nulidade $(A) = 0 \Rightarrow N(A) = \{0\}$

Em geral: $\boxed{N(A^tA) = N(A)}$

Pois $x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^tAx = 0 \Rightarrow x \in N(A^tA)$

Reciprocamente, se $x \in N(A^tA)$ então

$A^tAx = 0 \Rightarrow x^t(A^tAx) = 0 \Rightarrow (x^tA^t)(Ax) = 0$

$\Rightarrow (Ax)^t(Ax) = 0 \Rightarrow \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$

$\Rightarrow x \in N(A)$

Concluímos que $N(A^tA) = \{0\}$

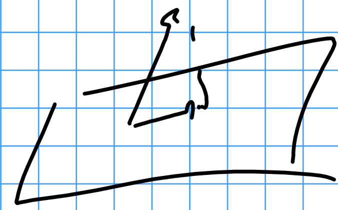
$\underset{n \times m}{A^t}\underset{m \times n}{A}$, é uma matriz quadrada $n \times n$

Uma matriz quadrada com espaço-nulo zero é invertível.

Logo A^tA é invertível.

—//—

A matriz $P_A = A(A^tA)^{-1}A^t$ tem as seguintes propriedades:



- $P_A^2 = P_A$
- $P_A^t = P_A$ (P_A é simétrica)

Pois

$$P_A^t = \left(A (A^tA)^{-1} A^t\right)^t = \underline{(A^t)^t}\,\underline{\left((A^tA)^{-1}\right)^t}\, A^t$$

$$= A \left(\underline{(A^tA)}^t\right)^{-1} A^t$$

$$= A \left(A^tA\right)^{-1} A^t$$

$$= P_A$$

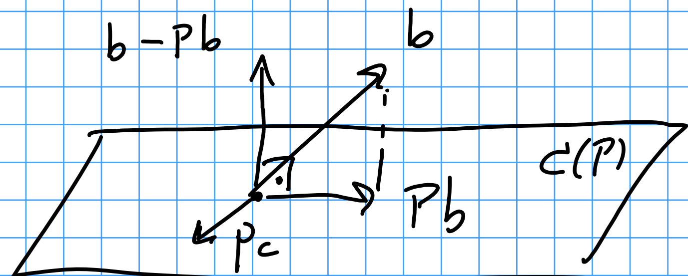
-||-

Recíprocamente, toda matriz P satisfazendo

$$P^2 = P \quad e \quad P^t = P$$

é a matriz de uma projeção ortogonal.

De fato, P será a projeção ortogonal sobre $C(P)$.



$$(b - Pb)^t \underbrace{Pc}_{\text{vetor arbitrário em } C(P)} = (b^t - (Pb)^t) Pc$$

$$= (b^t - b^t \underbrace{P^t}_{=P}) Pc$$

$$= b^t Pc - b^t \underbrace{P^2}_{=P} c$$

$$= b^t Pc - b^t Pc$$

$$= 0$$

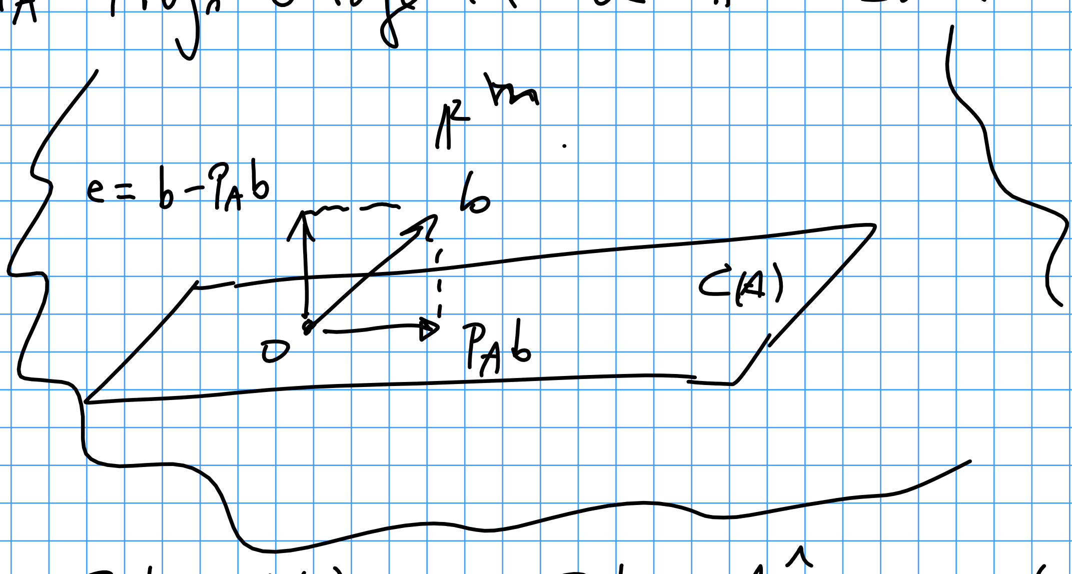
— // —

$A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ $\quad \underbrace{A}_{m} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{n} \right.$

$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$

$C(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$

$P_A :=$ Proj. ortogonal de $\mathbb{R}^m$ sobre $C(A)$



$P_A b \in C(A)$: $\quad P_A b = \underset{\sim}{A} \hat{x}$ para algum $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$

$P_A b$ fica caracterizado por :

$$e \perp C(A)$$

$\iff$ $e \in C(A)^{\perp} =$ espaço-nulo à esq. de A

$\iff$ $e^t A = 0$

$\iff$ $A^t e = 0$

$\iff$ $A^t(b - A\hat{x}) = 0$

$\iff$ $\boxed{(A^t A)\hat{x} = A^t b}$ posto$(A) = n$ $\Rightarrow$ $A^t A$ é <u>invertível</u>

$\iff$ $\hat{x} = (A^t A)^{-1} A^t b$

$$P_A b = A\hat{x} = A(A^t A)^{-1} A^t b \quad \forall b \in \mathbb{R}^m$$

$$\therefore \boxed{P_A = A(A^t A)^{-1} A^t}$$

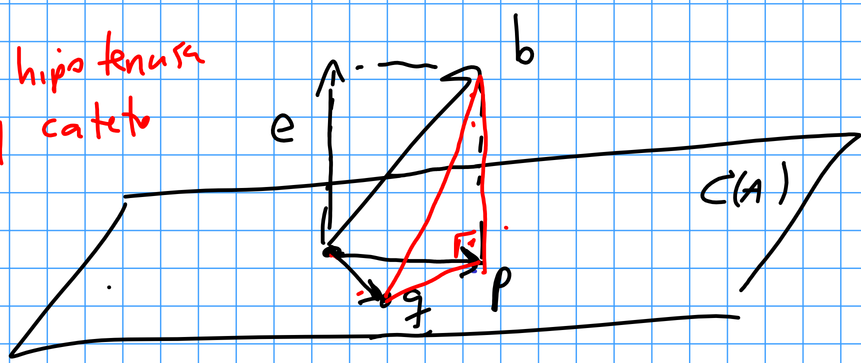
—||—

$Ax = b$ tem solução $\iff$ $b \in C(A)$

Se $b \notin C(A)$, $Ax = b$ não tem solução (exata), mas podemos buscar a <u>melhor</u> solução aproximada $\hat{x}$.

↑ minimizar $\|A\hat{x} - b\|$

$\|q-b\|$ hipotenusa
$> \|p-b\|$ cateto



ou
$\|A\hat{x}-b\|^2$
ou
$\|p-b\|^2$
ou
$\|e\|^2$

$$A\hat{x} = p = P_A b$$

$$e = p - b$$

$\|e\|^2$ é minimizado exatamente quando $e \perp C(A)$

$\Updownarrow$

$e \in C(A)^\perp$ = espaço nulo esq. de A

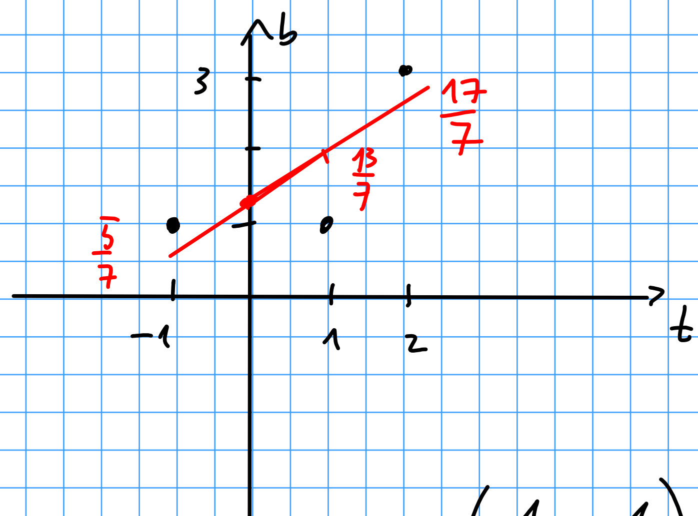
$$Ax = b \Rightarrow A\underline{\underline{\hat{x}}} = p$$

$\nexists x$

$$p = P_A b$$

Ex Lei Física: $b = C + Dt$.

t	b
-1	1
1	1
2	3



$$\begin{cases} C - D = 1 \\ C + D = 1 \\ C + 2D = 3 \end{cases} \qquad Ax = b \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eqs. normais $\quad A^t A\hat{x} = A^t b \qquad \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{pmatrix}$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^t b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$M\hat{x} = b \Rightarrow \hat{x} = M^{-1} b \qquad = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M^{-1}(M\hat{x}) = M^{-1} b}$$

$$\underbrace{(\underbrace{M^{-1}M}_{=I})\hat{x}}_{=\hat{x}} \qquad = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \hat{C} = \frac{9}{7}, \quad \hat{D} = \frac{4}{7}$$

A melhor aproximação é a reta $\frac{9}{7} + \frac{4}{7} t$

$\approx 1.28 + 0.57 t$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 9/7 \\ 4/7 \end{pmatrix} \qquad p = A\hat{x}$$

—//—

Decaimento radioativo

$$b = C e^{-\lambda t} + D e^{-\mu t}$$

C, D: quantidades de dois materiais radioativos

λ, μ: constantes de decaimento

$$C e^{-\lambda t_1} + D e^{-\mu t_1} = b_1$$

$$\vdots$$

$$C e^{-\lambda t_m} + D e^{-\mu t_m} = b_m$$

$$\begin{pmatrix} e^{-\lambda t_1} & e^{-\mu t_1} \\ \vdots & \vdots \\ e^{-\lambda t_m} & e^{-\mu t_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

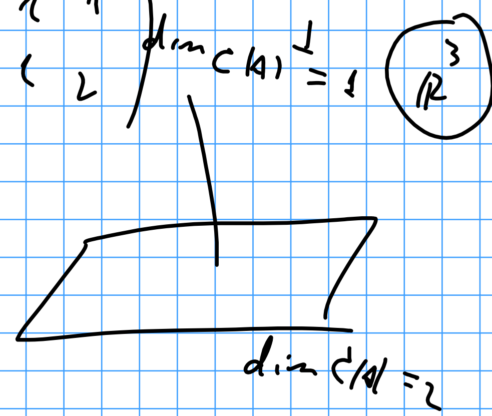
— 4 —

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^t A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$P_A = A (A^t A)^{-1} A^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

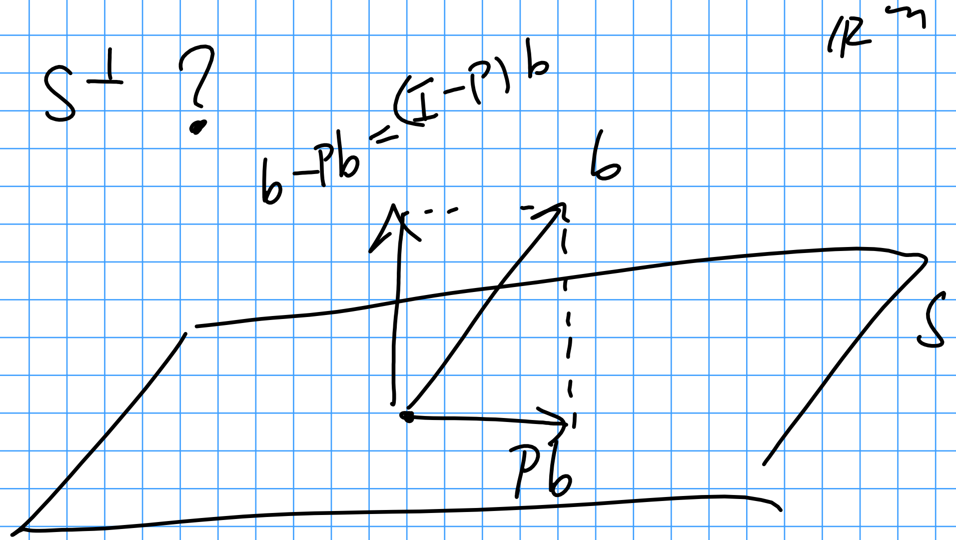
$$P_A = A (A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 6 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$p = \underset{\substack{\parallel \\ P_A b}}{A \hat{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$$

— 11 —

Obs. Se P é a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^m$ sobre um subespaço S, então qual é a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^m$ sobre $S^\perp$?



Resp. $I - P$.

Notemos:

$$(I-P)^2 = (I-P)(I-P) = I^2 - IP - PI + \underbrace{P^2}_{=P}$$

$$= I - 2P + P$$

$$= I - P$$

$$(I-P)^t = I^t - \underbrace{P^t}_{=P}$$

$$= I - P$$