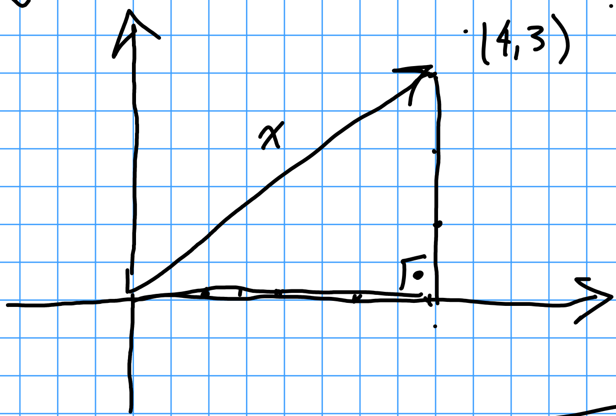
ORTOGONALIDADE

03/06/21

(CAP. 3)

$\mathbb{R}^2$



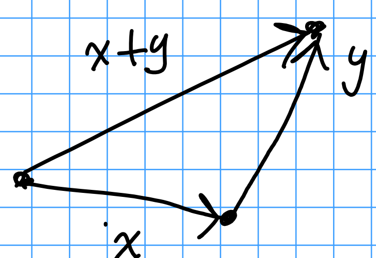
$x = (4,3)$

$\|x\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$x = (x_1, x_2) \Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0$ <u>Teorema</u> <u>de</u> <u>Pitágoras</u>

<u>comprimento</u> ou <u>módulo</u> ou <u>norma</u> de x

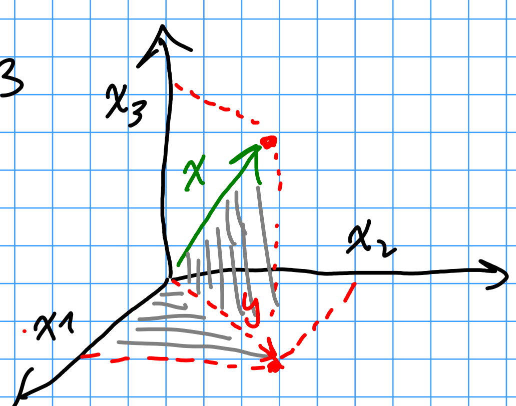
$\|x\| = 0 \iff x = 0$



$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

<u>Desigualdade</u> <u>triangular</u>

$\mathbb{R}^3$



$\|x\|^2 = x_3^2 + y^2$

$\|y\|^2 = x_1^2 + x_2^2$

$\therefore \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$\mathbb{R}^n \quad x = (x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

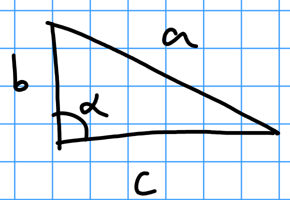
$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

$\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$= x^t \cdot x$

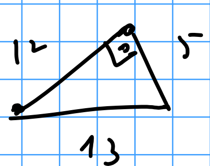
— // —

<u>Teorema de Pitágoras</u>



$a^2 = b^2 + c^2 \iff \alpha = 90°$

5, 12, 13 $\equiv$ ↑



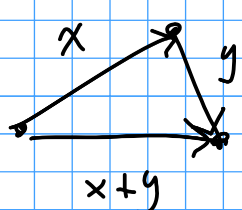
$5^2 = 25$

$12^2 = 144$ +

$13^2 = 169$

Usaremos a recíproca do T. de Pitágoras:

$x = (x_1, \ldots, x_n)\ ,\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$



$x \perp y$

x é <u>ortogonal</u> a y $\left(\measuredangle(x,y) = 90° = \pi/2\right)$

$\iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$$(x_1+y_1)^2 + \cdots + (x_n+y_n)^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2) + (y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

$$\cancel{x_1^2} + 2x_1y_1 + \cancel{y_1^2} + \cdots + \cancel{x_n^2} + 2x_ny_n + \cancel{y_n^2} = \cancel{x_1^2} + \cdots + \cancel{x_n^2} + \cancel{y_1^2} + \cdots + \cancel{y_n^2}$$

$$\cancel{2}\,(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) = 0$$

$$x \perp y \iff x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0$$

$$\iff (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff x^t \cdot y = 0$$

<u>Critério para ortogonalidade de vetores</u>

$$\boxed{x \perp y \iff x^t y = 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)}$$

<u>Ex.</u> $(2,2,-1) \perp (-1,2,2)$, pois

$$(2 \;\; 2 \;\; -1)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 4 - 2 = 0$$

<u>Def</u> Em geral, para $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$x^t y$ é chamado de <u>produto escalar</u>

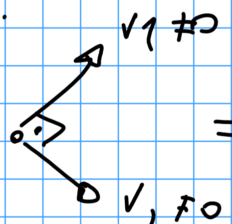
dos vetores x, y.

Agora:

$x \perp y \iff$ o prod escalar de x e y é zero

Fato importante

Se $v_1, \dots, v_k$ são vetores (não-nulos) de $\mathbb{R}^n$ que são <u>mutuamente</u> <u>ortogonais</u> então $v_1, \dots, v_k$ são LI.

$k=2$ 

$\Rightarrow v_1 \not\parallel v_2$

<u>Dem</u> Seja $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ uma relação,

$$v_1^t(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = v_1^t \cdot 0$$

$$\alpha_1 \underline{v_1^t v_1} + \alpha_2 \underline{v_1^t v_2} + \dots + \alpha_n \underline{v_1^t v_n} = 0$$

$$\alpha_1 \|v_1\|^2 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_n 0 = 0$$

$$\alpha_1 \underbrace{\|v_1\|^2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$$

$$v_2^t(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = 0$$

$\vdots$

$$\alpha_2 \underbrace{\|v_2\|^2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0}$$

$\vdots$

$$\boxed{\alpha_n = 0}$$

$\therefore$ $v_1, \dots, v_k$ LI $\checkmark$.

//-

$\mathbb{R}^n$ Suponhamos que $v_1, \dots, v_n$ são mutuamente ortogonais. Pelo visto acima, $v_1, \dots, v_n$ são LI. Logo $v_1, \dots, v_n$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $v_1, \dots, v_n$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$. Sejam agora

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, e_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

Então $e_1, \dots, e_n$ ainda é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ e, além disso, $e_1, \dots, e_n$ são vetores unitários:

$$\|e_1\| = \dots = \|e_n\| = 1$$

Neste caso, dizemos que $e_1, \dots, e_n$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Ex. $e_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$

$e_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$

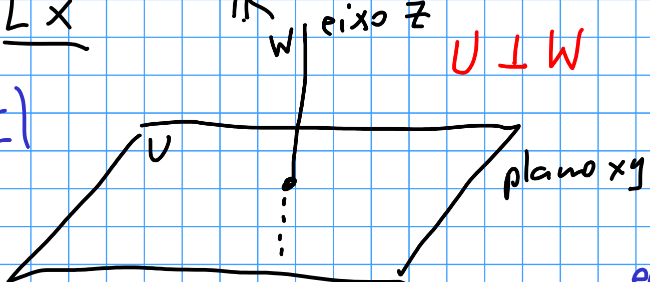
e_1, e_2 é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

SUBESPAÇOS ORTOGONAIS

Dois subespaços U e W de $\mathbb{R}^n$ são ditos **ortogonais** se todo vetor de U é ortogonal a todo vetor de W.

Ex $\mathbb{R}^3$

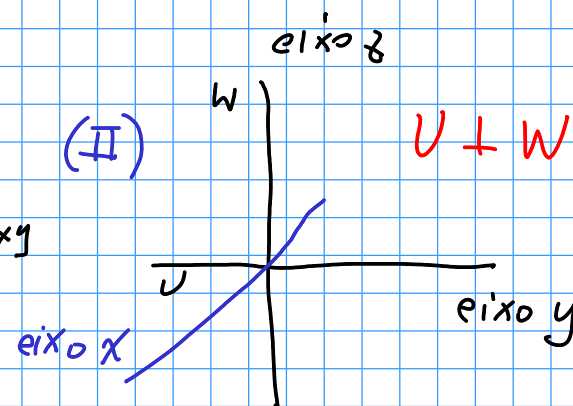
(I)



$U \perp W$

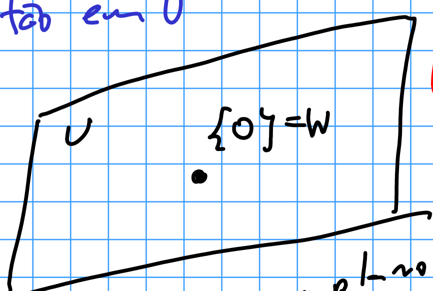
Todos os vetores $\perp$ W estão em U

(II)



$U \not\perp W$

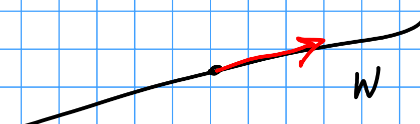
Existem vetores $\perp$ W fora de U

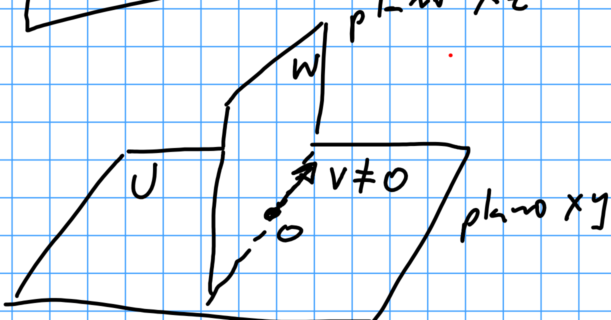


$U \perp W$

$U = \mathbb{R}^3$

$U \not\perp W$





$v \in U$ e $v \in W$ $\quad v \in U \cap W$

$v \neq 0 \Rightarrow v \not\perp v$

$\therefore U \not\perp W$

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA LINEAR, COMPLEMENTO

- O espaço-linha é ortogonal ao espaço-nulo
- O espaço-coluna é ortogonal ao espaço-nulo à esquerda.

1.ª dem $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$

$$x \in N(A) \iff Ax = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{\text{linha } 1} \\ \vdots \\ \text{linha } m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} (\text{linha } 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0 \\ \vdots \\ (\text{linha } m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \perp \text{linha } 1, \ldots, \text{linha } m$$

Obs

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \perp \text{qq combinação linear das linhas de } A$$

$\Leftrightarrow$ $x \perp$ espaço-linha de $A = C(A^t)$

<u>**Obs.**</u> Se $x \perp v_1, \dots, v_k$ então $x \perp$ qq comb lin de $v_1, \dots, v_k$

De fato:

$$x^t (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 (\underbrace{x_1^t v_1}_{=0}) + \dots + \alpha_k (\underbrace{x_1^t v_k}_{=0})$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow x \perp \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \quad //$$

Segunda afirmação:

$y \in$ espaço-nulo à esq de $A \Leftrightarrow y^t A = 0$

$$\Leftrightarrow (y_1 \cdots y_n) \begin{pmatrix} c & & c \\ o & & o \\ l & & l \\ u & \cdots & u \\ n & & n \\ a & & a \\ 1 & & n \end{pmatrix} = (0 \cdots 0)$$

$\Leftrightarrow$ $y \perp$ coluna $1, \dots,$ coluna n

$\Leftrightarrow$ $y \perp C(A)$

<u>2.ª dem</u>

$A^t \in M(n \times m, \mathbb{R})$

$x \in N(A) \Leftrightarrow \underline{Ax = 0}$

$v \in L(A)$ (espaço-linha) $\Leftrightarrow$ $v = A^t y$ para algum $y \in \mathbb{R}^m$

$= C(A^t)$

Agora:

$$\underset{\sim}{v}^t \underset{\sim}{x} = (A^t y)^t x = (y^t (A^t)^t) x$$
$$= (y^t A) x = y^t (Ax)$$
$$= y^t 0$$
$$= 0$$

$\therefore N(A) \perp L(A)$

Segunda af

$y \in C(A) \Leftrightarrow y = Ax$ para algum $x \in \mathbb{R}^n$

$v \in$ espaço-nulo à esq. de A $\Leftrightarrow v^t A = 0$

Então:

$$v^t \cdot y = v^t (Ax) = \underbrace{(v^t A)}_{=0} x = 0 x = 0$$

$\therefore$ espaço-nulo à esq $\perp C(A)$

Def Seja W um ~~subespaço~~ (ou subconjunto) de $\mathbb{R}^n$. O complemento ortogonal de W é o conjunto de todos os vetores de $\mathbb{R}^n$ que são ortogonais a W, e ele é denotado $W^\perp$.

Obs. $W^\perp$ sempre é um subespaço de $\mathbb{R}^4$

De fato, se $x, y \in W^\perp$ então

$$(x+y)^t \cdot w = (x^t + y^t) \cdot w = \underbrace{x^t w}_{=0} + \underbrace{y^t w}_{=0} = 0 + 0 = 0$$
$w \in \overline{W}$

$\Rightarrow \quad x + y \in W^\perp$

e se $x \in W^\perp$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$(\alpha x)^t \cdot w = \alpha (x^t w) = \alpha 0 = 0$$
$w \in \overline{W}$

$\Rightarrow \alpha x \in W^\perp$

$0 \in W^\perp$ ✓ pois $0 \perp w, \forall w \in \overline{W}$

Na verdade, vimos que

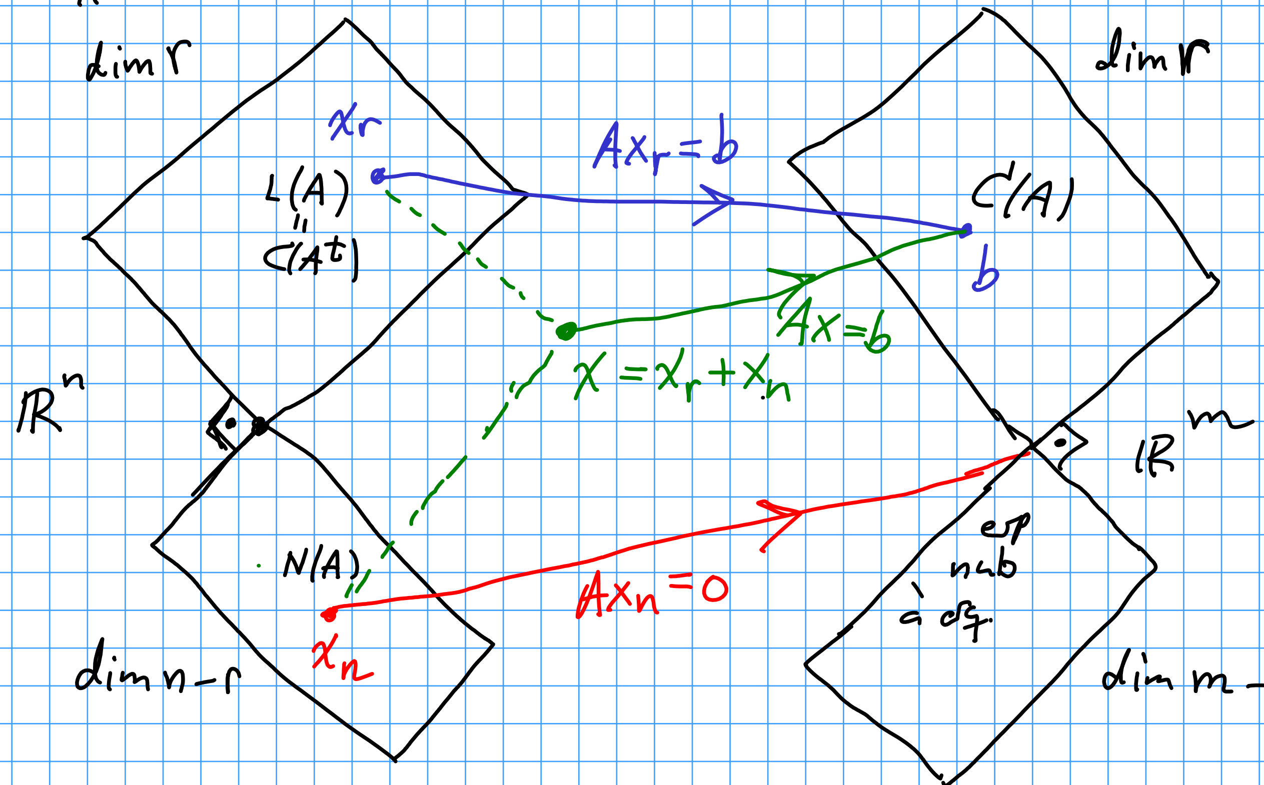
$$\begin{cases} N(A)^\perp = C(A^t) \\ C(A)^\perp = \text{espaço-nulo à esquerda de } A \end{cases}$$

Ex $Ax = b$ tem solução

$\iff b \in C(A) \iff b \perp$ espaço-nulo à esquerda de A

$\Leftarrow$) $y^t b = 0$ sempre que $y^t A = 0$

— // —



3F $A : L(A) \to C(A)$ é inversível, ou seja, todo vetor $b \in C(A)$ é imagem por A de exatamente um vetor $x_r \in L(A)$.

De fato: se $Ax_r = b = Ax_r'$ $\quad x_r, x_r' \in L(A)$

então $A(x_r - x_r') = Ax_r - Ax_r' = b - b = 0$

$\Rightarrow \boxed{x_r - x_r' \in N(A)}$

$x_r, x_r' \in L(A) \Rightarrow \boxed{x_r - x_r' \in L(A) = N(A)^\perp}$

$$\Rightarrow x_r - x_r' = 0 \Rightarrow x_r = x_r'$$