EXERCÍCIOS 27/05/21

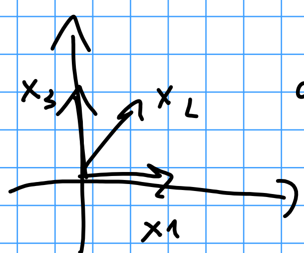
§2.6 Exs de revisão

1.3 [Inglês] e 2.1 [Português]

V ou F ?

(a) Se $x_1, \dots, x_m$ são vetores que geram um subespaço S, então $\dim S = m$. 18F 0V

F !



$\dim \mathbb{R}^2 = 2$

- Se $x_1, \dots, x_m$ são LI então $\dim S = m$
- Só pode ocorrer $x_1, \dots, x_m$ LI caso a dim do espaço ambiente seja $\geq m$.

(b) A intersecção de dois subespaços de um espaço vetorial não pode ser vazia.

V !

Cada subespaço de um espaço vetorial contém o vetor nulo. Logo, a intersecção de dois deles também o contém.

(c) Se $Ax = Ay$ então $x = y$.

Se $N(A) \neq 0$, podemos ter $x, y \in N(A)$, $\underline{\underline{x \neq y}}$

e $Ax = 0 = Ay$.

F

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\dim N(A)}{\underset{\parallel}{\text{nulidade}(A)}} = 1 \qquad \underset{\dim C(A)}{\underset{\parallel}{\text{posto}(A)}} = 1$$

$$\text{nulidade} + \text{posto} = \text{nº de colunas}$$

$$1 + 1 = 2$$

- Se A é invertível, então:

$$Ax = Ay \Rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}(Ay)$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)x = (A^{-1}A)y$$

$$\Rightarrow Ix = Iy$$

$$\Rightarrow x = y.$$

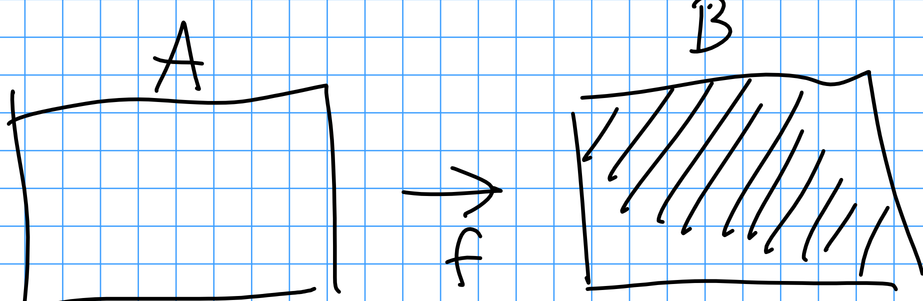
Note que A invertível $\Rightarrow N(A) = \{0\}$.

• Mais geralmente, se $N(A) = \{0\}$, então

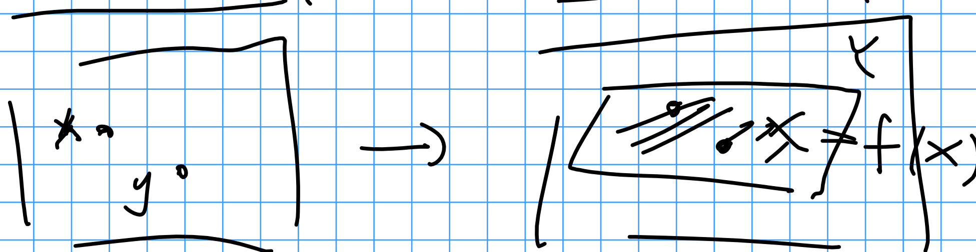
vale $\boxed{Ax = Ay \Rightarrow x = y}$

De fato:

$$
\begin{aligned}
Ax = Ay &\Rightarrow Ax - Ay = 0 \\
&\Rightarrow A(x-y) = 0 \\
&\Rightarrow x - y \in N(A) \underset{\text{hip}}{=} \{0\} \\
&\Rightarrow x - y = 0 \\
&\Rightarrow x = y
\end{aligned}
$$



$f(A) = B$ sobrejetora



$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ <u>injetora</u>

ou

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Temos

$x \mapsto Ax$ é injetora $\Leftrightarrow N(A) = \{0\}$

Já vimos que $N(A)=\{0\} \Rightarrow x \mapsto Ax$ é injetora

Se $N(A) \neq \{0\}$, então existe $\underline{x \in N(A)}$ com $x \neq 0$, e então

$$Ax = 0 = A(0)$$

com $x \neq 0$

ou seja $x \mapsto Ax$ não é injetora.

(d) O espaço-linha de A tem uma base única que pode ser determinada reduzindo A à forma escalonada. F

Após o escalonamento, as linhas não-nulas formarão uma base do espaço-linha de A.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$A \to \underline{\underline{A^t}}$ escalona

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x-1} \xrightarrow{x-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 1 \quad 0} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x-1}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 1 \quad 0} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Se uma matriz quadrada A tem colunas LI, então também A^2 tem colunas LI.

$$x \longmapsto Ax \longmapsto \underbrace{A(Ax)}_{=A^2x}$$

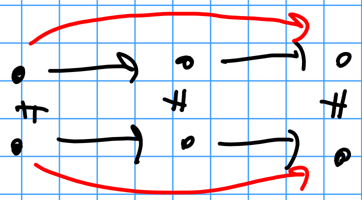
$T(x) = Ax$

$S(x)$

Colunas LI $\iff$ Não existem relações entre as colunas

$\iff$ $N(A)=\{0\}$ $\iff$ A injetora.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4 = 0$$



$A \in M(n\times n, \mathbb{R})$

$U=V=W=\mathbb{R}^n$

$T(x)=S(x)=A\cdot x$

$x\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "S\circ T"'] & V \arrow[r, "S"] & W \end{tikzcd}$$

T injetora e S injetora $\Rightarrow$ $S\circ T$ injetora

<u>Dem</u> $\quad \cancel{S}(Tu_1)=\cancel{S}(Tu_2) \qquad u_1,u_2\in U$

$\Rightarrow \quad \cancel{T}u_1=\cancel{T}u_2 \qquad (S \text{ inj})$

$\Rightarrow \quad u_1=u_2 \qquad (T \text{ inj})$

$\therefore$ $S\circ T$ é inj.

—//—

Colunas de A LI $\Rightarrow$ $N(A)=\{0\}$ $\Rightarrow$ Multiplicação à esq. por A é inj.

⇒ Multiplicação à esq por A^2 é inj ⇒ $N(A^2) = \{0\}$ ⇒ Colunas de A^2 são LI

—//—

Colunas de A são LI ⟸ $N(A) = \{0\}$

Seja $x \in N(A^2)$. Então

$$A^2 x = 0 \Rightarrow A(Ax) = 0$$

$$\Rightarrow Ax \in N(A) \underset{\text{per hip}}{=} \{0\} \Rightarrow Ax = 0$$

$$\Rightarrow x \in N(A) = \{0\} \Rightarrow x = 0$$

$\therefore N(A^2) = \{0\}$

V

$\therefore$ Colunas de A^2 são LI

$$\boxed{A(N(A^2)) \subset N(A)}$$

vale sempre (A quadr)

$$x \in N(A^2) \Rightarrow A^2 x = 0 \Rightarrow A(Ax) = 0 \Rightarrow Ax \in N(A)$$

—//—