TRANSFORMAÇÕES LINEARES 25/05/21

Seja (§2.6)

$A \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

O que essa matriz faz com vetores $x \in \mathbb{R}^n$

Resp: A transforma x em $Ax \in \mathbb{R}^n$.

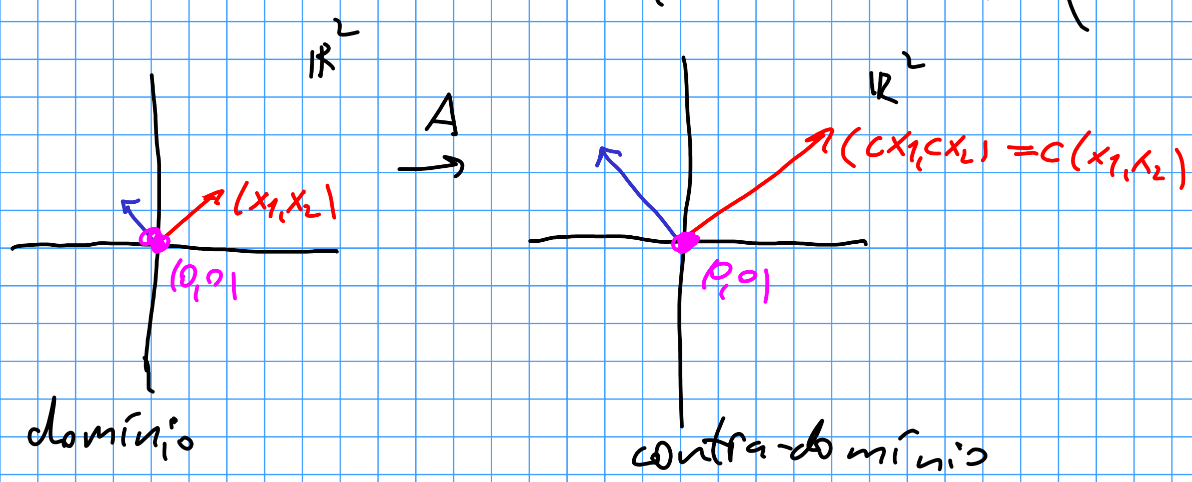
Isso define uma função ou transformação

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Exemplos $n = 2$ $\mathbb{R}^2$

1. $A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$

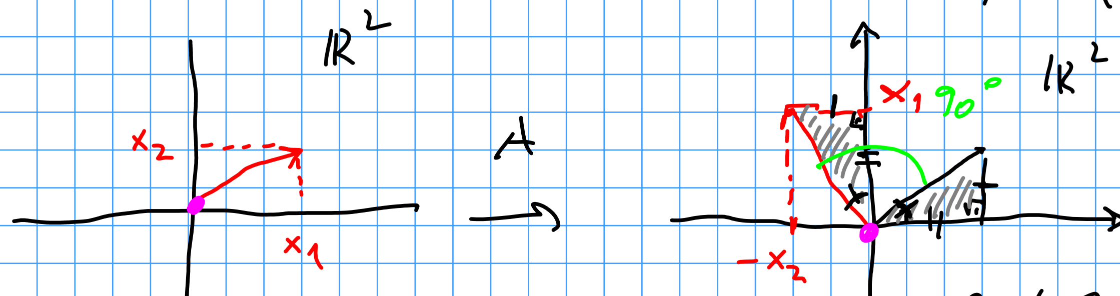
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto Ax = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}$$



homotetia ou dilatação

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto Ax = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$



Os triângulos retângulos hachurados são congruentes

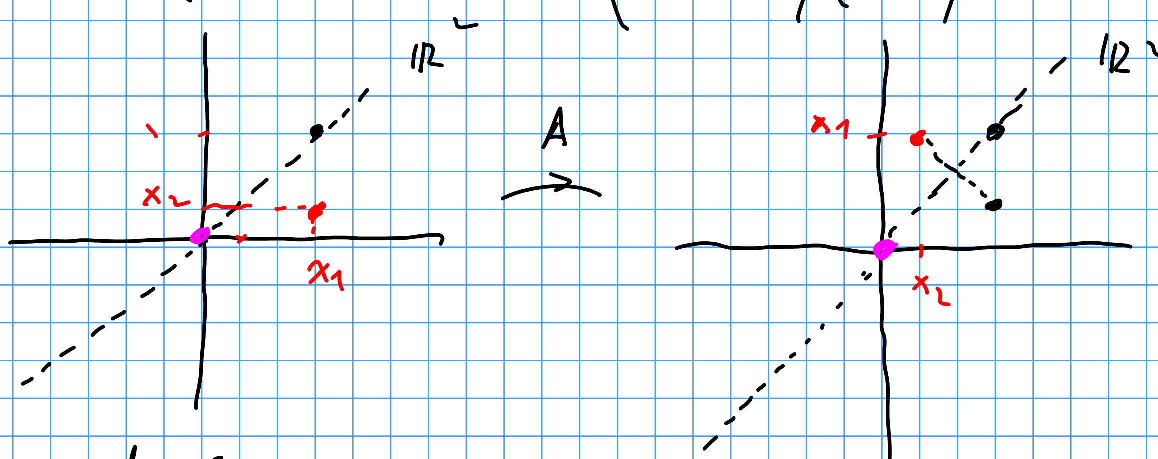
domínio

contra-domínio

<u>Rotação</u> de $90°$ ou $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário.

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$



domínio

contra-domínio

Reflexão na reta $x_1 = x_2$ (bissetriz dos quadrantes ímpares)

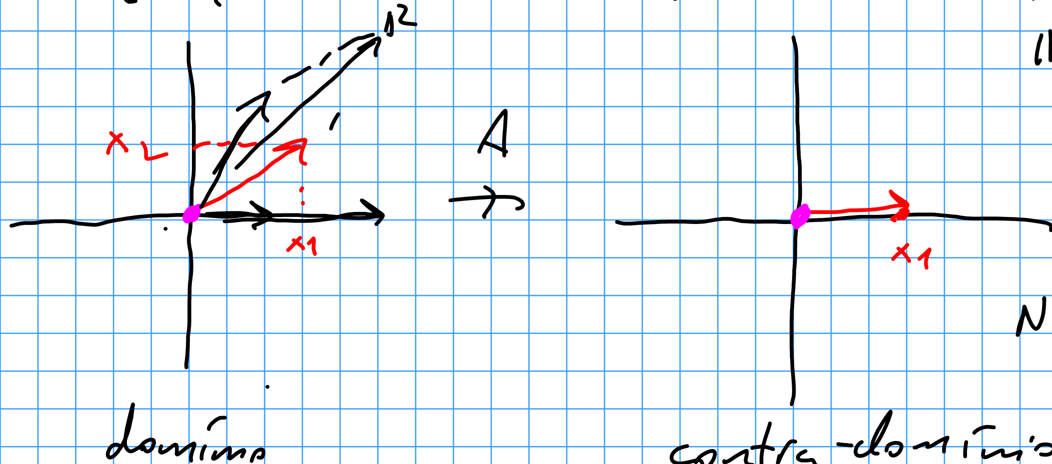
A reta $x_1 = x_2$ consiste de **pontos fixos**

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \operatorname{im} A$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2 \qquad\qquad \mathbb{R}^2$



$N(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Projeção ortogonal sobre o eixo x

$\boxed{\text{imagem} = \text{eixo } x}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

projeção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre o eixo x

rotação de $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo z

etc.

Propriedades da transformação $x \mapsto Ax$

(i) $A0 = A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

0 é um ponto fixo

(ii) $A(x+y) = Ax + Ay$

$x, y \in \mathbb{R}^n$

(iii) $A(cx) = c(Ax)$

$c \in \mathbb{R}$

Def. Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma função $T : V \to W$ que satisfaz:

(i) $T(0) = 0$

(ii) $T(u+v) = Tu + Tv \quad \forall u, v \in V$

(iii) $T(\lambda u) = \lambda Tu \quad \forall u \in V \quad \lambda \in \mathbb{R}$

—//—

Ex (Derivação de polinômios)

$V = W = P_n(\mathbb{R})$ polinômios de grau $\leq n$, mais o polinômio nulo

$$T : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$$
$$p(t) \longmapsto p'(t) = \frac{dp}{dt}$$

$\operatorname{im} T \subseteq P_{n-1}(\mathbb{R})$

imagem de T

T é linear:

- $T(0) = 0$ $\quad T(\text{polinômio nulo}) = \text{polinômio nulo}$

- $$\begin{aligned} T(p(t)+q(t)) &= (p(t)+q(t))' \\ &= p'(t) + q'(t) \\ &= Tp(t) + Tq(t) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} T(cp(t)) &= (cp(t))' \\ &= c\,p'(t) \\ &= c\,Tp(t) \end{aligned}$$

Ex Multiplicação por um polinômio fixo $q(t)$

$$M_{q(t)}(p(t)) = q(t) \cdot p(t)$$

- $M_{q(t)}(0) = q(t) \cdot 0 = 0$

- $$\begin{aligned} M_{q(t)}(p_1(t)+p_2(t)) &= q(t)(p_1(t)+p_2(t)) \\ &= q(t)p_1(t) + q(t)p_2(t) \\ &= M_{q(t)}p_1(t) + M_{q(t)}p_2(t) \end{aligned}$$

$$\bullet\ M_{q(t)}(cp(t)) = q(t)(cp(t))$$
$$= c\,(q(t)p(t))$$
$$= c\,M_{q(t)}p(t)$$

$M_{q(t)} : P_n(\mathbb{R}) \to P_{n+m}(\mathbb{R})$ é linear

$\underbrace{\deg}_{\text{grau}}\, q(t) = m$

—//—

$A \in M(m\times n, \mathbb{R}) \Rightarrow \underset{\in \mathbb{R}^n}{x} \mapsto \underset{\in \mathbb{R}^m}{Ax}$ define uma transf linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$A \in M(\underline{m} \times \underline{n}, \mathbb{R})$

$$\underset{m\times n}{\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}} \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}} = \underset{m\times 1}{\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}}$$

Transf lin $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

—//—

Reciprocamente: dada uma transformação linear $T : V \to W$, vejamos que T provém de um matriz $A \in M(m\times n, \mathbb{R})$, onde $m = \dim W$ e $n = \dim V$.

Ex. Suponhamos que $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma transf. linear que satisfaz

$$\to \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad e \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Pergunta: O que é $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$?

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = T\left(x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x_1\, T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_1 \\ 4x_1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = T\left(x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x_2\, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_2 \\ 6x_2 \\ 8x_2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad = T\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_1 \\ 4x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x_2 \\ 6x_2 \\ 8x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \\ 4x_1 + 8x_2 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Mais geralmente:

Se $T: V \to W$ é uma transf linear e $v_1, \dots, v_n$ é uma base de V, então T fica completamente determinada pelos seus valores em $v_1, \dots, v_n$.

<u>Dem.</u> Dado qq $v \in V$, usando a propriedade de base, v se escreve

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n,$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são únicos, e, como T é linear,

$$\begin{aligned} Tv &= T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 \underline{\underline{T v_1}} + \dots + \lambda_n \underline{\underline{T v_n}} \end{aligned}$$

//

<u>Ex.</u> (Derivação de polinômios)

$$Dp = p' \qquad D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$$

Base de $P_3(\mathbb{R})$: $p_1 = 1$, $p_2 = t$, $p_3 = t^2$, $p_4 = t^3$ — base canônica.

domínio e contra-domínio

$$Dp_1 = 0 = 0$$
$$Dp_2 = 1 = p_1$$
$$Dp_3 = 2t = 2p_2$$
$$Dp_4 = 3t^2 = 3p_3$$

D age como a seguinte matriz:

transf lin.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = (D)$$

matriz

Por ex., $p = 2 + t - t^2 - t^3$

$$Dp = 1 - 2t - 3t^2 + 0t^3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(Dp)_B (p)_B = (Dp)_B}$$

$$1 \cdot 1 + (-2) t + (-3) t^2 + 0 \cdot t^3$$
$$= 1 - 2t - 3t^2$$

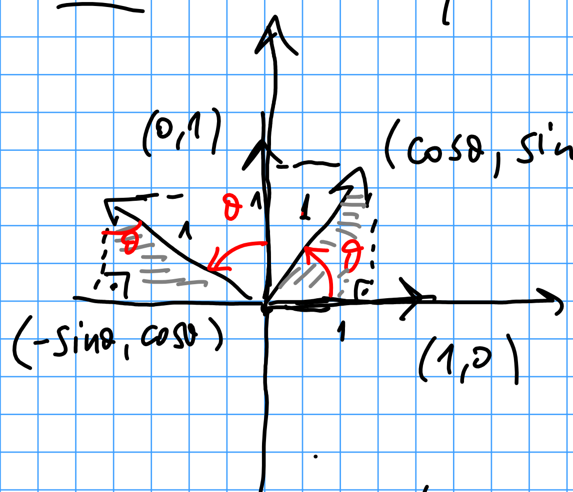
Transf lin D $\rightsquigarrow$ Matriz de D na base B $(D)_B$

polinômio $\qquad$ vetor de coordenadas de p na base $\mathcal{B}$

$$p \rightsquigarrow (p)_{\mathcal{B}}$$

$$\boxed{(Dp)_{\mathcal{B}} = (D)_{\mathcal{B}}(p)_{\mathcal{B}}}$$

Ex (Rotação de ângulo θ no $\mathbb{R}^2$)



$$R_\theta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$R_\theta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$(R_\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$(R_\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$(R_0) = \begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I$$

$$(R_{-\theta}) = \begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & +\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$(R_\theta)(R_\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = (R_{\theta+\varphi})$$

$$R_\theta \circ R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$$

Em geral: composição de transformações lineares corresponde, no nível de matrizes, à multiplicação das matrizes.