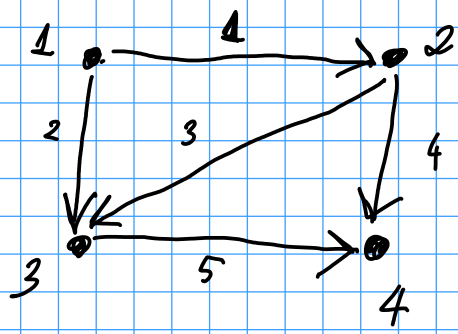
GRAFOS

20/05/21



$$\Rightarrow A = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{arestas} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\ \text{vértices} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 & \end{array}$$

matriz de incidência do grafo

Circuito elétrico : corrente elétrica circulando pelo grafo

arestas : fios

vértices : potenciais

Grafo m arestas, n colunas $\Rightarrow A \in M(m \times n, \{\pm 1, 0\})$

Interpretação dos 4 espaços fundamentais

$N(A)$
Espaço-nulo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A soma dos coeficientes de uma linha qq é

$$-1 + 1 + 0 + \dots + 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in N(A)$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0\\ -x_1 + x_3 &= 0\\ -x_2 + x_3 &= 0\\ -x_2 + x_4 &= 0\\ -x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

$$\therefore N(A) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \underbrace{\dim N(A)}_{\text{Nulidade de } A} = 1$$

x_i : potencial no i-ésimo vértice

$\Rightarrow$ Ax : diferenças de potencial

$Ax = 0$: em equilíbrio, todos potenciais iguais

$Ax = b$: b ddp's desejadas

$$\text{Posto de } A = \begin{matrix}\text{N.º colunas}\\ \text{de } A\end{matrix} - \underbrace{\text{Nulidade de } A}_{1}$$

$$= 4 - 1$$

$$= 3$$

-//-

Espaço-coluna $C(A)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$C(A) = \{ b \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = b \text{ tem pelo menos uma solução} \}$$

$$\begin{array}{c} \times -1 \\ \\ \times 1 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & b_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b_5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -b_1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -b_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b_5 \end{array}\right)$$

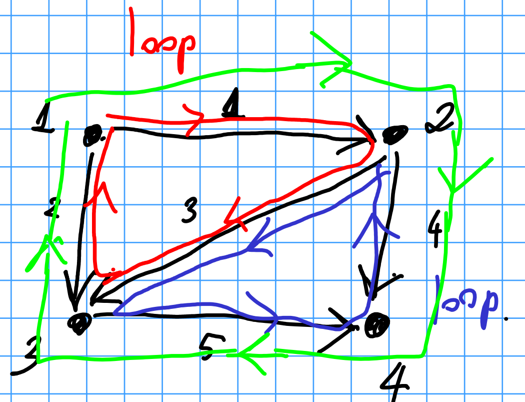
$$\begin{array}{c} \\ \times -1 \\ \\ \times -1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b_4 - b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b_5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \times -1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -b_2 + b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -b_4 + b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b_5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ ! \rightarrow \\ \\ ! \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_3 + b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -b_4 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 + b_3 - b_4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{b_1 - b_2 + b_3 = 0} \quad e \quad \boxed{b_3 - b_4 + b_5 = 0}$$

$$C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{matrix} b_1 - b_2 + b_3 = 0 \\ b_3 - b_4 + b_5 = 0 \end{matrix} \right\}$$



$$b_1 + b_3 - b_2 = 0$$

$$b_3 + b_5 - b_4 = 0$$

$$b_1 - b_2 + b_4 - b_5 = 0$$

loop = loop − loop

Lei da voltagem de Kirchoff : A soma das ddp ao longo de um loop é zero.

—//—

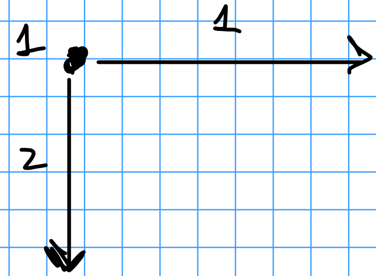
Espaço-nulo à esquerda : $N(A^t)$

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^t y = 0$

$$\begin{aligned} -y_1 - y_2 \qquad\qquad &= 0 \\ y_1 \qquad - y_3 - y_4 \qquad &= 0 \\ y_2 + y_3 \qquad - y_5 &= 0 \\ y_4 + y_5 &= 0 \end{aligned}$$

y_i : corrente fluindo através do i-ésimo vértice

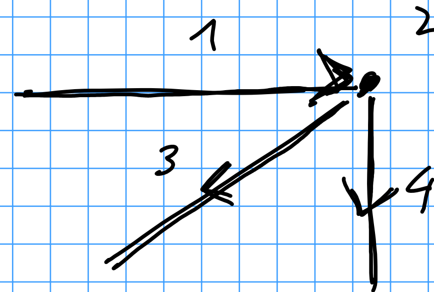


$-y_1 - y_2 = 0$

$+y_1 = \underbrace{-y_2}$

A corrente total fluindo através do vértice 1 é zero.

corrente do vértice 1 que segue a aresta 2 na direção oposta (∴ entra em 1)



$y_1 - y_3 - y_4 = 0$

$y_1 = y_3 + y_4$

$$\text{Nulidade}(A^t) = \text{N.º colunas de } A^t - \underbrace{\text{Posto}(A^t)}$$

$\text{Posto}(A^t) = \text{Posto}(A)$

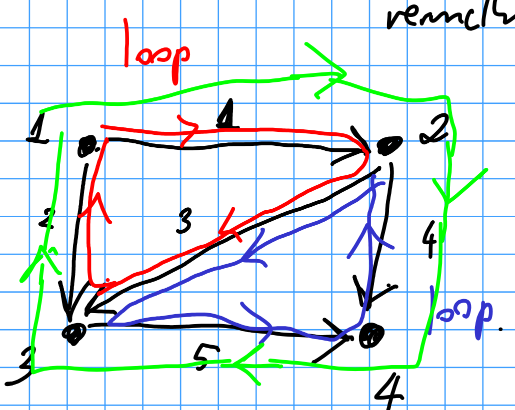
$$\text{Nulidade}(A^t) = \dim N(A^t) = 5 - 3 = 2$$

Soluções L.I. de $A^t y = 0$:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

loop vermelho

loop azul



Espaço-linha de A : $C(A^t)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

linhas 1, 2, 4 formam uma base do espaço-linha de A.

$\dim C(A^t) = 3 = \text{Posto}(A^t) = \text{Posto}(A)$

$A^t y = f$

f_i : a fonte de corrente no i-ésimo vértice

Lei de Kirchoff para a corrente : A corrente total através de cada vértice é zero.

$$\begin{aligned} -y_1 - y_2 \qquad\qquad\qquad &= f_1 \\ y_1 \qquad -y_3 - y_4 \qquad &= f_2 \\ y_2 + y_3 \qquad -y_5 &= f_3 \\ y_4 + y_5 &= f_4 \end{aligned}$$

$$y_1 + f_2 = y_3 + y_4$$

Conservação da carga elétrica

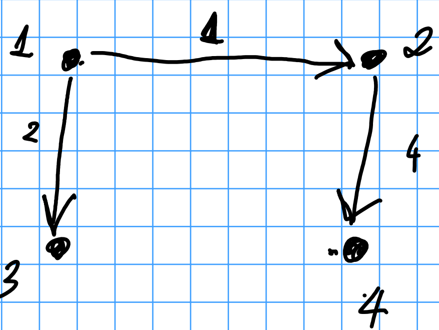
Quando $A^t y = f$ tem solução?

<u>Resp</u>. Se e somente se $f \in C(A^t)$

$$C(A^t) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \{ f \in \mathbb{R}^4 \mid f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0 \}$$

Interpretação do algoritmo de eliminação



Sobram as arestas 1, 2, 4

Eles formam uma <u>árvore</u> <u>geradora</u> para o grafo.

contém todos os vértices

grafo que não tem <u>loops</u> ↔ circuito fechado

— " — $A \in M(m \times n, \{\pm 1, 0\})$

Espaço-nulo $N(A)$: dim 1, gerado por $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Esp-coluna $C(A)$: dim $n-1 = r$ posto

Esp-linha $C(A^t)$: dim $r = n-1$ linhas A = árvore geradora

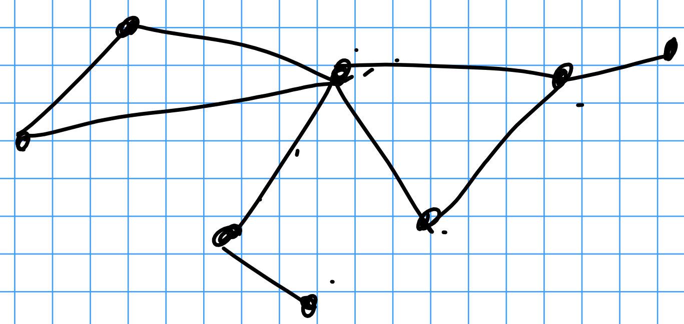
Esp-nulo à esq $\underline{N(A^t)}$: dim $m - r = m-(n-1) = m-n+1$

N.º vértices − N.º arestas + N.º loops

$= \cancel{n} - \cancel{m} + (\cancel{m} - \cancel{n} + 1)$

$= 1$

Teorema de Euler para grafos

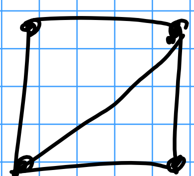


$V = 8$

$A = 9$

$L = 2$

$8 - 9 + 2 = 1$ ✓



$4 - 5 + 2 = 1$

Pontes de Königsberg