Os Quatro Subespaços Fundamentais (§2.4)

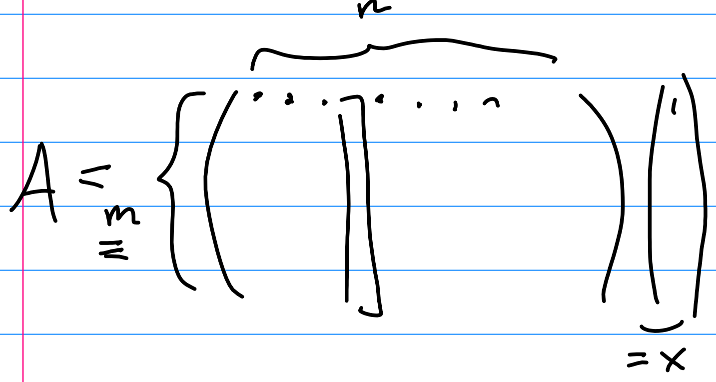
18/05/21

Seja $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$.

São eles:

		dim
1. $C(A)$	espaço-coluna de A	posto r
2. $N(A)$	espaço-nulo de A	$n - r$
3. $C(A^t)$	espaço-linha de A	r
4. $N(A^t)$	espaço-nulo de A^t = espaço-nulo à esq de A	$m - r$

$A^t \in M(n \times \underset{=}{m}, \mathbb{R})$



$C(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$

$C(A^t)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$

$N(A) = \{x \mid Ax = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$

$N(A^t)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$

Ex. $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} = U = R$

$C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ múltiplos de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ reta em $\mathbb{R}^2$

$N(A)$ $\quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{x_1 = 0}$ $\quad x_2, x_3$ variáveis livres

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ plano em $\mathbb{R}^3$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C(A^t) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ reta em $\mathbb{R}^3$

$N(A^t)$ $\quad y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad y_1 = 0$

y_2 livre

$N(A^t) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ reta em $\mathbb{R}^2$

$m = 2$

$r =$ posto de A é 1 $\quad n = 3$

—//—

Espaço-linha de A

É o espaço-coluna de A^t $\quad C(A^t)$

Vamos explicar → $\overset{r}{\underset{\parallel}{}}$ posto(A) $=$

$$\dim C(A^t) = \dim C(U^t) = \text{posto-linha}(A)$$

$$A = \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

linhas $\neq 0$ formam uma base de $C(U^t)$

Espaço-nulo de A

$$x \in N(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0 \Leftrightarrow x \in N(U)$$

colunas pivô

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

colunas livres

n

x_1, x_3 : variáveis-pivô $\leftarrow r$

x_2, x_4 : variáveis livres $\leftarrow n-r$

Tomando $\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix}$ e $\begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_4 = 1 \end{matrix}$, produzimos uma base para $N(U) = N(A)$ $\quad \dim N(A) = n - r$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ base de } N(A)$$

núcleo de A

"kernel" $\ker A$

Espaço-coluna de A

imagem de A $\quad \operatorname{im} A$

$$m\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}}_{n} \cdot \begin{pmatrix} \\ x \\ \\ \end{pmatrix}\right\}n = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}\Big\}m$$

$$A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \longmapsto Ax$$

$$C(A) = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$
$$= \operatorname{im} A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

colunas-pivô formam uma base de $C(A)$

colunas-pivô formam uma base de $C(U)$

$$C(U) \neq C(A)$$
$$\dim C(U) = \dim C(A)$$

$$\boxed{\text{Posto-linha}(A) = \text{Posto-coluna}(A) = \text{Posto}(A) = r}$$

De fato

$$
\begin{aligned}
\text{Posto-linha}(A) &= \dim \text{Espaço-linha}(A) \\
&= \dim \text{Espaço-linha}(U) \\
&= \text{número de pivôs}
\end{aligned}
$$

$$
U = \begin{pmatrix}
d_1 & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & d_2 & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \text{posto}(A) = \text{posto}(U) \\
&= \text{n.º de colunas pivô de } A\ (U) \\
&= \dim C(A) \\
&= \dim \text{Espaço-coluna}(A) \\
&= \text{posto-coluna}(A)
\end{aligned}
$$

Espaço-nulo à esq. de A

$$N(A^t) = \{y \mid A^t y = 0\} = \{y \mid y^t A = 0\}$$

$$(A^t y)^t = y^t (A^t)^t = y^t A$$

O Teorema Fundamental da Álgebra Linear

1. $\dim \mathcal{C}(A) = r$

2. $\dim N(A) = n - r$

3. $\dim \mathcal{C}(A^t) = r$

4. $\dim N(A^t) = m - r$

$$A \in M(m \times n, \mathbb{R}) \quad \begin{cases} \dim N(A) + \dim \mathcal{C}(A) = n \\ \dim N(A^t) + \dim \mathcal{C}(A^t) = m \end{cases}$$

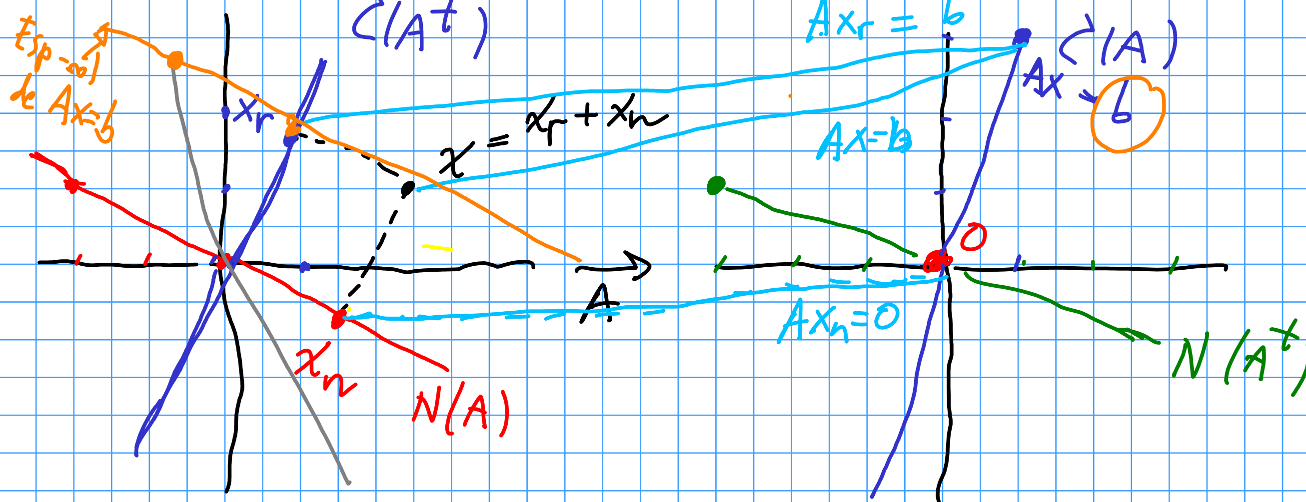
Ex.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad m = n = 2$

$\text{col}\,2 = 2\,\text{col}\,1 \Rightarrow r = 1$

$\mathcal{C}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad N(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \text{col}\,2 = 3\,\text{col}\,1 \quad r = 1$

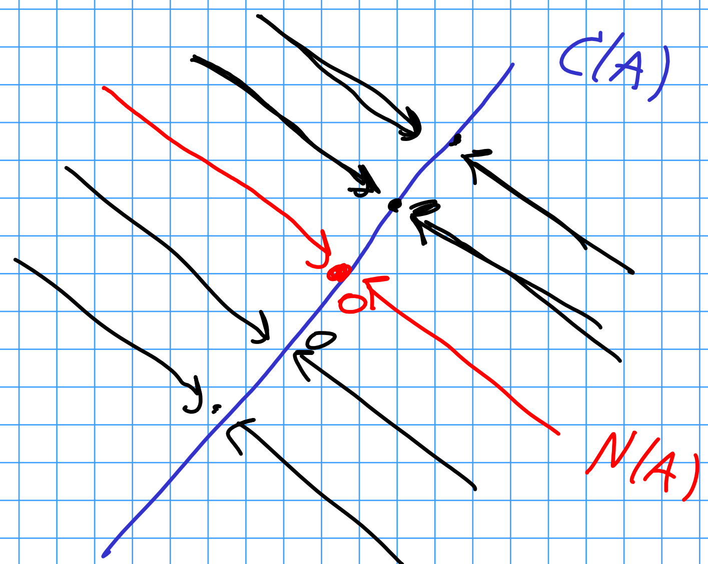
$\mathcal{C}(A^t) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad N(A^t) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$



$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^2$

$$\to \quad A x_r = A(x - x_n) = Ax - \underbrace{Ax_n}_{=0} = Ax$$

$$x_r = x - x_n$$



INVERSAS LATERAIS

Dada $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$:

Uma inversa à esquerda para A é uma matriz B tq. $BA = I$.

Uma inversa à direita para A é uma matriz C t.q. $AC = I$.

Se A tem uma inversa à esq B e tem uma inversa à dir C, então:

$$B = B.I = B\underbrace{(AC)}_{=I} = \underbrace{(BA)}_{=I}C = C$$

Isto é $B = C$

A existência de inversa lateral para A tem a ver com o posto r de A.

Nós temos: $r \leq m$ e $r \leq n$

Então o valor máximo de r é $\min\{m,n\}$

Na situação do posto máximo:

EXISTÊNCIA

- $r = m \Rightarrow \dim \underbrace{C(A)}_{\subset \mathbb{R}^m} = m \Rightarrow \underset{\text{im} A}{C(A)} = \mathbb{R}^m$

$m \leq n$ Neste caso, para todo $b \in \mathbb{R}^m$, $\rightarrow Ax = b$ tem pelo menos uma solução, e A tem uma inversa à direita C, $AC = I_m$.

Uma solução particular para $Ax = b$ é $x = Cb$

UNICIDADE

- $r = n$

$m > n$

$\text{Posto}(A) = r = n$
$= \text{n.}^\circ$ de colunas de A

$\dim C(A) = r = n$

As colunas de A são vetores L.I. de $\mathbb{R}^m$

$C(A) < \mathbb{R}^m$

dim n

Não existe relação entre as colunas de A

$N(A) = 0$

$Ax = b$ tem no máximo uma solução (se tiver alguma solução)

A tem uma inversa à esquerda B,

$BA = I_n$.

Caso de matrizes quadradas $m = n$

São equivalentes:

0. A tem posto máximo $r = m = n$.
1. As colunas de A geram $\mathbb{R}^n$.

1'. $Ax = b$ tem pelo menos uma solução $\forall b \in \mathbb{R}^n$

2. As colunas de A são L.I.

2'. $Ax = 0$ tem somente a solução $x = 0$

3. As linhas de A geram $\mathbb{R}^n$

3'. As linhas de A são L.I.

4. Eliminação vai até o fim: $PA = LDU$ com n pivôs

! 5. $\det A \neq 0$

6. 0 não é autovalor de A

7. $A^t A$ é definida positiva