EXERCÍCIOS

13/05/21

§2.3

1. Dados [Ex. 4 na versão em Português]

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

vetores do $\mathbb{R}^3$, verificar que

→ v_1, v_2, v_3 são L.I., mas

v_1, v_2, v_3, v_4 são L.D.

Resolução. Precisamos ver que não existe relação entre v_1, v_2, v_3. Seja

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Então

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \cancel{\alpha_2} + \cancel{\alpha_3} = 0 & \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \cancel{\alpha_3} = 0 & \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 & \Rightarrow \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ Não existe relação entre v_1, v_2, v_3.

$\therefore$ São L.I.

Por outro lado:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$$

variáveis pivô

variável livre

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ família a 1-parâmetro de soluções

Tomando, por exemplo, $\alpha_4 = 1$:

$$\alpha_3 = -4\alpha_4 = -4$$

$$\alpha_2 = -\alpha_3 - 3\alpha_4 = 4 - 3 = 1$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 = -1 + 4 - 2 = 1$$

$$\therefore 1 v_1 + 1 v_2 - 4 v_3 + 1 v_4 = 0$$

$\therefore$ v_1, v_2, v_3, v_4 são L.D.

Alternativamente, para a 2.ª parte, podemos argumentar que $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ sempre que tivermos mais do que 3 vetores em $\mathbb{R}^3$, eles serão L.D.

Ainda: $\underbrace{v_1, v_2, v_3}_{3 \text{ vetores},\ 3 = \dim \mathbb{R}^3}$ é L.I. $\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ é uma base de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ gera $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ Qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$

é comb linear de v_1, v_2, v_3. Em particular, v_4 é comb linear de $v_1, v_2, v_3 \Rightarrow \exists$ relação linear entre v_1, v_2, v_3, v_4 $\therefore$ v_1, v_2, v_3, v_4 LD

[Ex. 10 na versão em Português]

8. Suponhamos que w_1, w_2, w_3 L.I.

Mostrar que → $v_1 = w_2 + w_3$

→ $v_2 = w_1 + w_3$ também são L.I.

→ $v_3 = w_1 + w_2$

Resolução. Suponhamos que

→ $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \quad (*)$$

é uma relação linear.

$$\alpha_1 (w_2 + w_3) + \alpha_2 (w_1 + w_3) + \alpha_3 (w_1 + w_2) = 0$$

→ $$(\alpha_2 + \alpha_3) w_1 + (\alpha_1 + \alpha_3) w_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) w_3 = 0$$

Como w_1, w_2, w_3 são L.I. por hipótese, essa relação não pode existir. Então:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}$$

$\times(-1)$ (Permutando linhas)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 & \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 & \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_3 = 0 & \Rightarrow \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

∴ Todos os coeficientes em (*) são nulos

∴ v_1, v_2, v_3 L.I. //

—//—

18. Decidir se b pertence ao subespaço gerado por $w_1, \ldots, w_n$.

(a) $w_1 = (1,1,0)$ $\qquad b = (3,4,5)$
$w_2 = (2,2,1)$ $\qquad\;\; \underbrace{3,4}_{\neq}$
$w_3 = (0,0,2)$

Resolução $\quad \mathbb{R}^3$

b pertence ao subespaço gerado por w_1, w_2, w_3 se e somente se podemos escrever

$$b = x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3$$

para alguns $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Sist. lin. não-homogêneo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\times -1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$x_1 + 2x_2 = 3$

$x_2 + 2x_3 = 5$

$0 = 1$!!!

Impossível

$\therefore$ $b \notin$ subesp gerado por w_1, w_2, w_3 $= \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

Alternativamente:

$w_2 = 2w_1 + \frac{1}{2} w_3$, por inspeção.

$$\langle w_1, w_2, w_3 \rangle = \langle w_1, w_3 \rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = x_2 \right\}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad 3 \neq 4 \quad \Rightarrow \quad b \notin \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$$

b. $w_1 = (1, 2, 0)$

$w_2 = (2, 5, 0)$ $\qquad b \in \mathbb{R}^3$ arbitrário

$w_3 = (0, 0, 2)$

$w_4 = (0, 0, 0)$

Resolução. $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

$b = (b_1, b_2, b_3)$

$$b = x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 & \times -2 \\ 2x_1 + 5x_2 = b_2 & \\ 2x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ x_2 = b_2 - 2b_1 \\ 2x_3 = b_3 \end{cases}$$

3 colunas pivot

$\Rightarrow x_3 = \frac{b_3}{2}, \quad x_2 = b_2 - 2b_1, \quad x_1 = b_1 - 2(b_2 - 2b_1)$
$= 5b_1 - 2b_2$

$\therefore$ Qualquer $b \in \mathbb{R}^3$ pertence ao subespaço gerado por w_1, w_2, w_3

$\therefore \langle \underbrace{w_1, w_2, w_3}_{3 \text{ vetores}} \rangle = \mathbb{R}^3$

$\hookrightarrow w_1, w_2, w_3$ é uma base de $\mathbb{R}^3$

Obs $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle = \mathbb{R}^3$

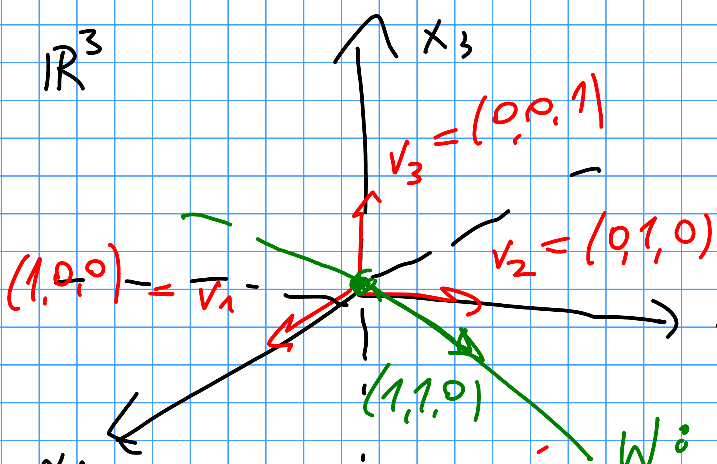
mas $w_1 w_2, w_3, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{w_4}}$ não é base

Lista é L.D.

$$\underbrace{0 \cdot w_1}_{=0} + \underbrace{0 \cdot w_2}_{=0} + \underbrace{0\, w_3}_{=0} + \underbrace{\overset{\neq 0}{1}\, w_4}_{=0} = 0$$

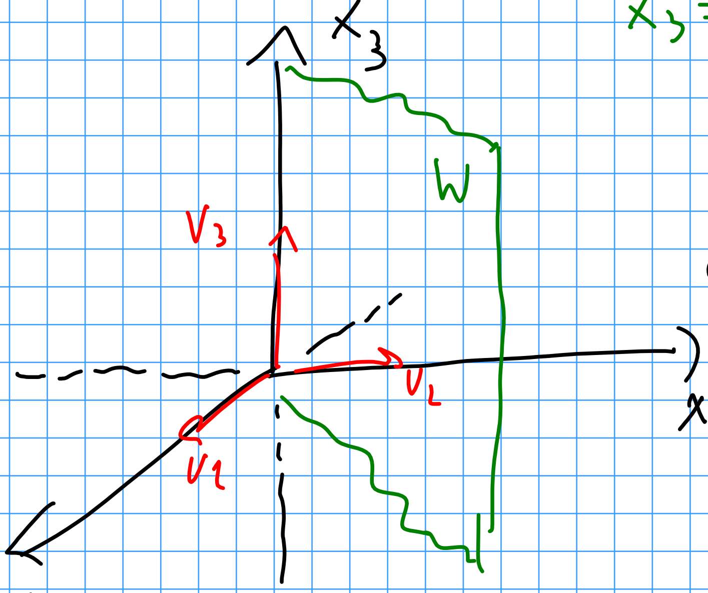
$$w_4 = 0w_1 + 0w_2 + 0w_3$$

"Ex. 31" Se v_1, v_2, v_3 é uma base de $\mathbb{R}^3$ e W é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, então os v_i's pertencentes a W formam uma base de W. V ou F?



$W: x_1 = x_2$
$\quad x_3 = 0$

$W = \langle (1,1,0) \rangle$



$v_1, v_2 \notin W$

$\hookrightarrow v_3 \in W$

$\dim W = 2$

v_3 não é base de W

$v_1 + v_2, v_3$ é base de W

#

Outra situação:

Se $v_1, \ldots, v_n$ é base de $\mathbb{R}^n$,

W é subespaço de $\mathbb{R}^n$,

$\dim W = \underline{\underline{k}}$, e

$\rightarrow$ $v_1, \ldots, v_{\underline{\underline{k}}} \in W$,

então $v_1, \ldots, v_k$ é base de W