CONJUNTOS GERADORES

11/05/21

Seja V um espaço vetorial

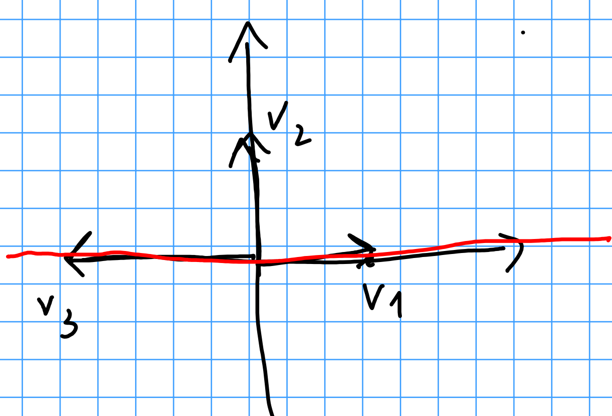
<u>Def</u> Um <u>conjunto gerador</u> de V é um conjunto de vetores $v_1, \dots, v_m$ de V tal que qualquer vetor $v \in V$ se representa na forma

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

onde $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.

<u>Ex.</u> $V = \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= (1,0) \\ v_2 &= (0,1) \end{aligned}\right]$$
$$v_3 = (-2,0)$$



✓ v_1, v_2, v_3 é um cj gerador de $\mathbb{R}^2$

✓ v_1, v_2 é um cj gerador de $\mathbb{R}^2$

v_1, v_3 não é um cj. gerador de $\mathbb{R}^2$

v_1, v_2 gera $\mathbb{R}^2$: Qualquer $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ se representa

$$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

v_1, v_2, v_3 gera $\mathbb{R}^2$ *a fortiori*:

$$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1) + 0(-2,0)$$
$$= x_1 v_1 + x_2 v_2 + 0 v_3$$
$$= 0(1,0) + x_2(0,1) + \left(-\frac{x_1}{2}\right)(-2,0)$$
$$= 0 v_1 + x_2 v_2 - \frac{1}{2} x_1 v_3$$
$$= \frac{1}{2} x_1 v_1 + x_2 v_2 - \frac{1}{4} x_1 v_3$$

v_1, v_3 não gera $\mathbb{R}^2$:

$$a v_1 + b v_3 = a(1,0) + b(-2,0)$$
$$= (a - 2b, \underset{\equiv}{0})$$

sempre 0, independente de $a, b \in \mathbb{R}$

v_1, v_3 gera o subespaço de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1,0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$$

Ex. $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ $\quad m\Big\{\Big(\overbrace{\big[\,\big] \cdots \big[\,\big]}^{n}\Big)$

$C(A)$ é gerado pelas colunas de A.

Espaço-coluna de A

é um subespaço de $\mathbb{R}^m$

Seja $v_1, \ldots, v_m$ uma lista de vetores em V.

- $v_1, \ldots, v_m$ é LI se não existe relação linear entre eles
- $v_1, \ldots, v_m$ gera V se as combinações lineares desses vetores produzem todos os vetores do espaço.

Def. $v_1, \ldots, v_m$ é uma base de V se $v_1, \ldots, v_m$ é L.I. e gera V.

Se $v_1, \ldots, v_n$ é uma base de V, então qualquer vetor $v \in V$ pode ser representado na forma

$$\rightarrow \quad v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n,$$

com $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, de modo único.

Ou seja, $a_1, \ldots, a_n$ estão unicamente determinados. De fato, se v admitisse duas representações nessa forma

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$$

—

e $v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

então

$$0 = (a_1 - b_1) v_1 + \dots + (a_n - b_n) v_n$$

Como $v_1, \dots, v_n$ é L.I. (por ser base), não existe relação linear entre eles.

$\Rightarrow a_1 - b_1 = \dots = a_n - b_n = 0$

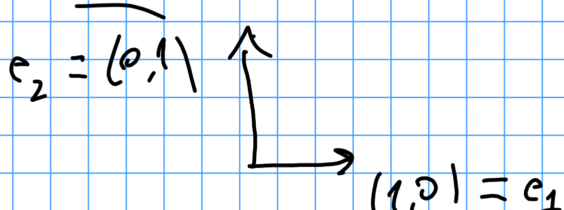
$\Rightarrow a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ //

Dado $v \in V$: $v = \underline{\underline{a_1}} v_1 + \dots + \underline{\underline{a_n}} v_n$ únicos $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$a_1, \dots, a_n$: <u>coordenadas</u> de v na base $v_1, \dots, v_n$

<u>Ex</u> $\mathbb{R}^2$

e_1, e_2 base canônica de $\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^n$ $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ base canônica de $\mathbb{R}^n$

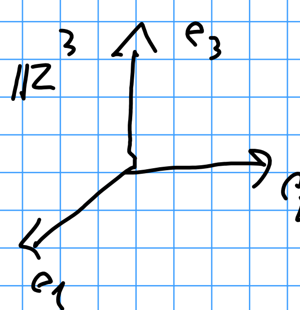
$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$

$\vdots$

$e_n = (0, \dots, 0, 1)$

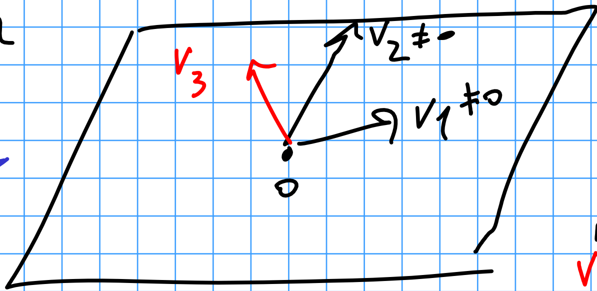
$\dim \mathbb{R}^n = n$

$\mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^2$

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$

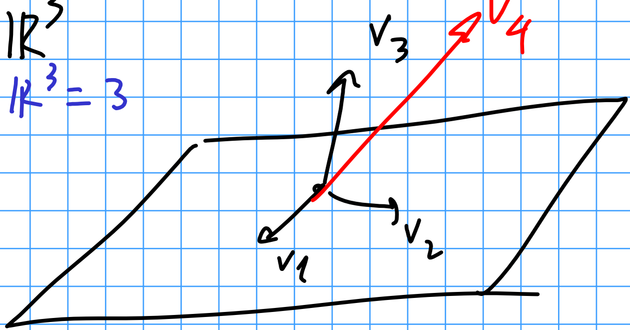


$\underbrace{v_1, v_2}_{\text{não são paralelos}}$ é base de $\mathbb{R}^2$

v_1, v_2, v_3 geram $\mathbb{R}^2$, mas não é base (pois não é LI)

$\mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$



v_1, v_2 não paralelos

v_3 fora do plano gerado por v_1, v_2

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ base de $\mathbb{R}^3$

$\underbrace{v_1, v_2, v_3, v_4}$ não é LI $\therefore$ não é base.

base de $C(A)$ (colunas pivô)

Ex.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\-1\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\6\\-3\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}3\\9\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\5\\0\end{matrix} \end{pmatrix}$$

escalonamento

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\0\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}3\\3\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\neq 0$ $\neq 0$

$\begin{cases} 4^a\,col = \frac{1}{3}\, 3^a\,col + 1^a\,col \\ 2^a\,col = 3 \;\; 1^a\,col. \end{cases}$

base de $C(U)$ (colunas pivô)

$C(A) \neq C(U)$

$L(A) = L(U)$ (espaço-linha)

Apesar de $C(A) \neq C(U)$, temos

$$\dim C(A) = \dim C(U) = 2$$

DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de elementos.

Esse nº de elementos será chamado de **dimensão de V**

__Dem.__

Sejam $v_1, \ldots, v_m$ duas bases qq. de V.

$w_1, \ldots, w_n$

Suponhamos que $n > m$.

$w_j = a_{1j} v_1 + \ldots + a_{mj} v_m$ pois $v_1, \ldots, v_m$ gera V

$$\underbrace{\begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{pmatrix}}_{\substack{n \\ \cdot \times n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{pmatrix}}_{\substack{m \\ \cdot \times m}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n}$$

$$W = V \cdot A \qquad A = (a_{ij})$$

$$A \in M(m \times n, \mathbb{R}) \quad n > m$$

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

A é "baixa e larga"

$Ax = 0$ tem infinitas soluções,

$\exists\, x \neq 0$ t.q. $Ax = 0$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$W = VA \Rightarrow Wx = V\underbrace{Ax}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow Wx = 0 \Rightarrow$ As colunas de W são LD

relação linear entre as colunas de W, pois $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Contradição, pois as colunas de W são a base $w_1, \dots, w_m$.

Então não podemos ter $n > m$.

Da mesma forma, trocando os papéis de m e n, não podemos ter $m > n$.

Logo, $m = n$ //. [Fim de § 2.3]

- Qualquer lista de vetores LI em V pode ser <u>completada</u> a uma base de V.

- Qualquer lista geradora de V pode ser <u>reduzida</u> a uma base de V.

<u>Ex.</u> Escalonamento de uma matriz produz uma base do espaço-linha dessa matriz.

—//—

→ posto(A) := nº de colunas pivô de A

$\dim C(A)$:= posto-coluna de A

$\dim L(A)$:= posto-linha de A

<u>Teorema</u> Esses números são todos iguais.

—//—

Ex. 19, §2.3, p. 100 [versão em Português]

Calcular uma base $x - 2y + 3z = 0$ em $\mathbb{R}^3$.

<u>Resolução</u>

$V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$\cup$

$U = \{(x, y, z) \mid x - 2y + 3z = 0\}$

Eq. lin = 0 define um subespaço

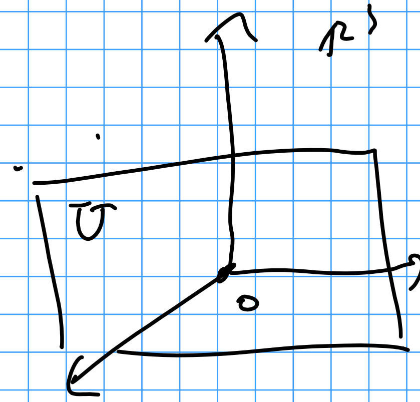
Sist lin $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = 0$ define subespaço de $\mathbb{R}^n$

$A \in M(m \times n, \mathbb{R})$

variável pivô

vars livres

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$



Espaço-solução $\subset \mathbb{R}^3$

dim 2

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - 2y + 3z = 0 \right\}$$

y, z: variáveis livres

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ geram U

Além disso, eles são LI, pois não são múltiplos um do outro.

$\therefore \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é uma base de V