INDEPENDÊNCIA LINEAR

06/05/21

Seja V um espaço vetorial (por ex., $\mathbb{R}^n$)

Sejam $v_1, \dots, v_n$ vetores de V.

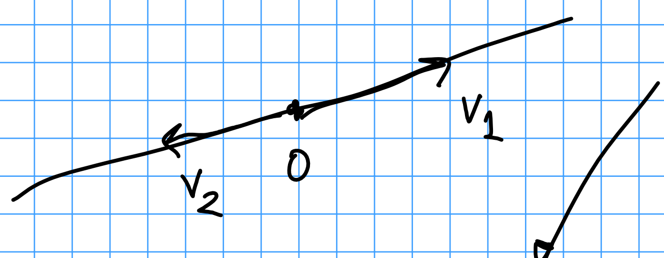
Uma <u>relação linear</u> entre $v_1, \dots, v_n$ é uma expressão

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \underline{\underline{\underline{0}}}$$

← vetor nulo de V

onde nem todos $a_1, \dots, a_n$ são nulos

Ex.



$v_2 = \lambda v_1$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$

LD

$$\lambda v_1 - v_2 = 0$$

$$\lambda \cdot v_1 + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_2 = 0$$

é uma relação linear entre v_1 e v_2.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

As colunas de A são vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\rightarrow \underbrace{3}_{\neq 0}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0}\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

LD

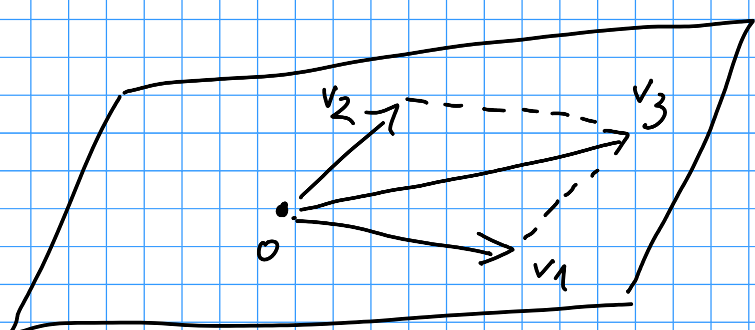
é uma relação linear entre $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}$

$$\underbrace{3}_{\neq 0}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0}\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix} + \underline{0}\begin{pmatrix}3\\9\\3\end{pmatrix} \underline{+0}\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

é uma relação linear entre as colunas de A.

LD

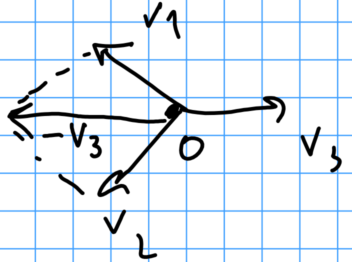
Ex. $V = \mathbb{R}^3$



Sejam $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ t.q. $v_3 = v_1 + v_2$.

Então $\underbrace{1}_{\neq 0} \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + (-1) v_3 = 0$ LD

é uma relação linear entre v_1, v_2, v_3



$\overset{\neq 0}{1} v_1 + 1 v_2 + 1 v_3 = 0$ é uma relação linear

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>Ex</u>. $v_1 = 0 \quad v_2, \dots, v_n$ LD

Neste caso sempre existe relação linear

$$\underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \overbrace{v_1}^{=0} + \underbrace{0}_{=0} v_2 + \dots + \underbrace{0}_{=0} v_n = 0$$

<u>Ex</u>. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ As colunas de I são LI.

Existe relação entre as colunas de I?

Se tivéssemos uma relação:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Logo, a resposta é não.

Def. Seja V um espaço vetorial

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Dizemos que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes (LD) se existe uma relação entre eles. Caso contrário, dizemos que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes (LI).

—//—

Obs. Seja $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Então as colunas de A são L.I. $\Longleftrightarrow$ $N(A) = \{0\}$.

De fato:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{v_1} & \cdots & \boxed{v_n} \end{pmatrix} \qquad v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$$

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ Quando é $x \in N(A)$?

$x \in N(A) \Longleftrightarrow Ax = 0$

N(A) é o espaço-solução deste sistema linear homogêneo

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Ax = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{v_1} & \cdots & \boxed{v_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$v_1, \dots, v_n$ são $\underline{LD} \iff \exists$ relação

$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$

onde algum dentre $x_1, \dots, x_n$ é $\neq 0$

$$\iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{onde algum } x_i \neq 0$$

$$\iff \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in N(A) \text{ e } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \underline{N(A) \neq} \{0\}$$

Obs. Seja $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Se $n > m$, então as colunas de A são __sempre__ LD.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3, \mathbb{R})$ $\times -1$

$n = 3 > m = 2$

pivôs

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Em termos do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

x_1, x_2: variáveis pivô

x_3: variável livre

Pode ter qq. valor atribuído

$\boxed{x_3 \in \mathbb{R}}$

Espaço-solução é $\neq \{0\}$

$x_2 = -x_3$

$x_1 = -2x_2 - x_3 = -2(-x_3) - x_3 = x_3$

(Espaço-solução) $N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$\neq \{0\}$ $\therefore$ As colunas de A são LD.

Em geral, se $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ e $n > m$, então $Ax = 0$ tem pelo menos $\underbrace{n-m}_{\geq 1}$ variáveis livres, logo $N(A) \neq \{0\}$ e, assim, as colunas de A são LD.

Da mesma forma, uma lista de n vetores em $\mathbb{R}^m$ com $n > m$ é sempre LD.