O ESPAÇO-COLUNA E ESPAÇO-NULO

04/05/21

Seja $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Vamos definir o espaço-coluna e o espaço-nulo de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

O espaço-coluna de A é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas colunas de A, $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

O espaço-coluna de A é o conjunto de todos $b \in \mathbb{R}^3$ tais que o sistema linear $Ax = b$ tem solução.

Por exemplo: se $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ então

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = b$$

e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é solução de $Ax = b$.

$$Ax = b$$

Em geral: $\left(\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad u\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \quad (*)$$

Soluções:

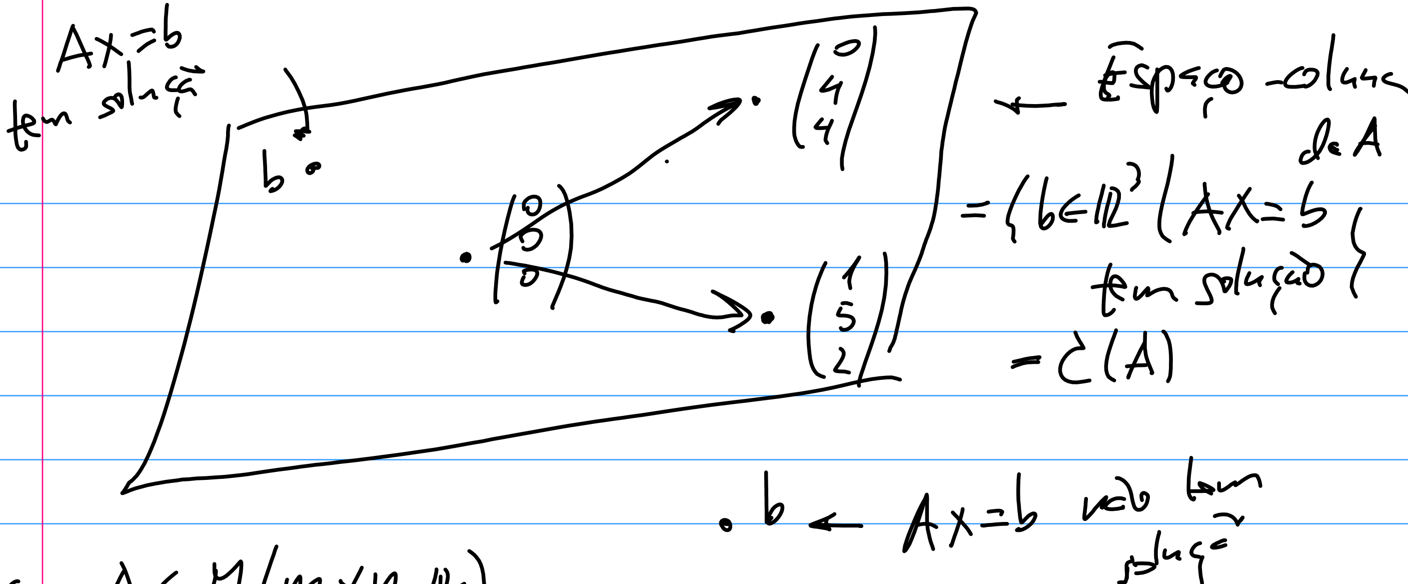
$u=1$, $v=0$ corresponde a $\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$

$u=0$, $v=1$ corresponde a $\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$

Da equação $(*)$ vemos que

$A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ tem solução em u, v

se e somente se $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ é uma combinação linear de $\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$, que são as colunas de A



Seja $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$

Podemos verificar diretamente que $C(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$.

- Se $b, b' \in C(A)$ então existem $x, x' \in \mathbb{R}^n$ t.q. $Ax = b$ e $Ax' = b'$.

$$A\underline{(x + x')} = Ax + Ax' = \underline{b + b'}$$

$$\Rightarrow b + b' \in C(A)$$

- Se $b \in C(A)$ então $\exists\, x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $Ax = b$. Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A(\underline{\lambda x}) = (A\lambda)x = \lambda(Ax) = \underline{\lambda b}$$

$$\Rightarrow \lambda b \in C(A)$$

- $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in C(A)$ pois $A(0) = 0$

$$\equiv$$

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^m}.$$

—//—

$A \in M(m \times n, \mathbb{R})$

O espaço-nulo de A é o conjunto solução de $Ax = 0$. $\longrightarrow N(A)$

Verifiquemos que $N(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

- $0 \in \mathbb{R}^n$ é uma solução de $Ax = 0$, pois

$$A \cdot \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^m}. \Rightarrow 0 \in N(A)$$

- $x, x' \in N(A) \Rightarrow Ax = 0$ e $Ax' = 0$

$$\Rightarrow A(x + x') = Ax + Ax' = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow x + x' \in N(A)$$

- $x \in N(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$Ax = 0 \Rightarrow A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda . 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda x \in N(A)$$

Exemplos

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $N(A) = ?$

$Ax = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cancel{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u = 0 \\ v = 0 \end{matrix}$

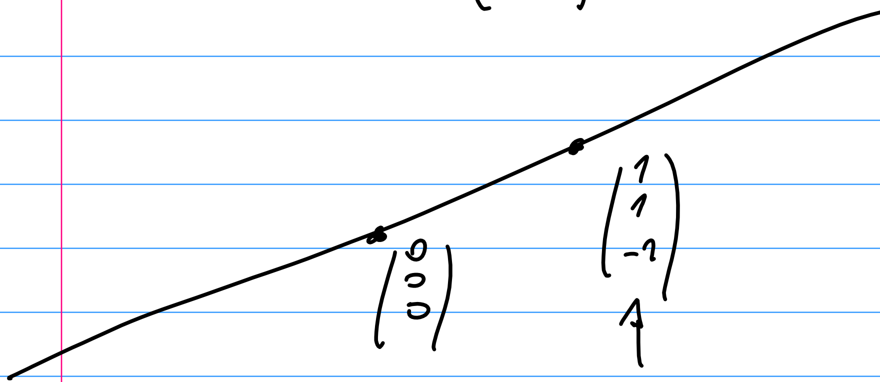
$N(A) = \{0\}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 1+0 = 1 \\ 5+4 = 9 \\ 2+4 = 6 \end{matrix}$

$\underset{\text{ou } \lambda}{\underline{1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \underset{\lambda}{\underline{1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \underset{(-\lambda)}{\underline{(-1)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

$\therefore N(B) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$



$N(B)$ é uma reta pela origem em $\mathbb{R}^3$

<u>Relação</u> <u>entre</u> <u>as</u> <u>soluções</u> <u>de</u> $Ax = 0$ <u>e</u> <u>as</u> <u>soluções</u> <u>de</u> $Ax = b$

Se $\quad Ax_p = b \quad$ (solução particular)

e $\quad Ax_n = 0$

então $\quad A(x_p + x_n) = \underbrace{Ax_p}_{=b} + \underbrace{Ax_n}_{=0} = b + 0 = b$

$\Rightarrow$ $x_p + x_n$ é uma solução de $Ax = b$

Reciprocamente, se $Ax_p = b$ e $Ax_p' = b$

então $\quad A(x_p' - x_p) = Ax_p' - Ax_p = b - b = 0$

$\Rightarrow$ $x_p' - x_p$ é uma solução de $Ax = 0$

Conclusão: a solução geral de $Ax=b$

é da forma $x = x_p + x_n$ onde

x_p é uma solução particular fixada de $Ax=b$,

e x_n é qualquer solução de $Ax=0$.

Exemplo. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in C(A)$

Como são as soluções de $Ax=b$?

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma solução particular de $Ax=b$

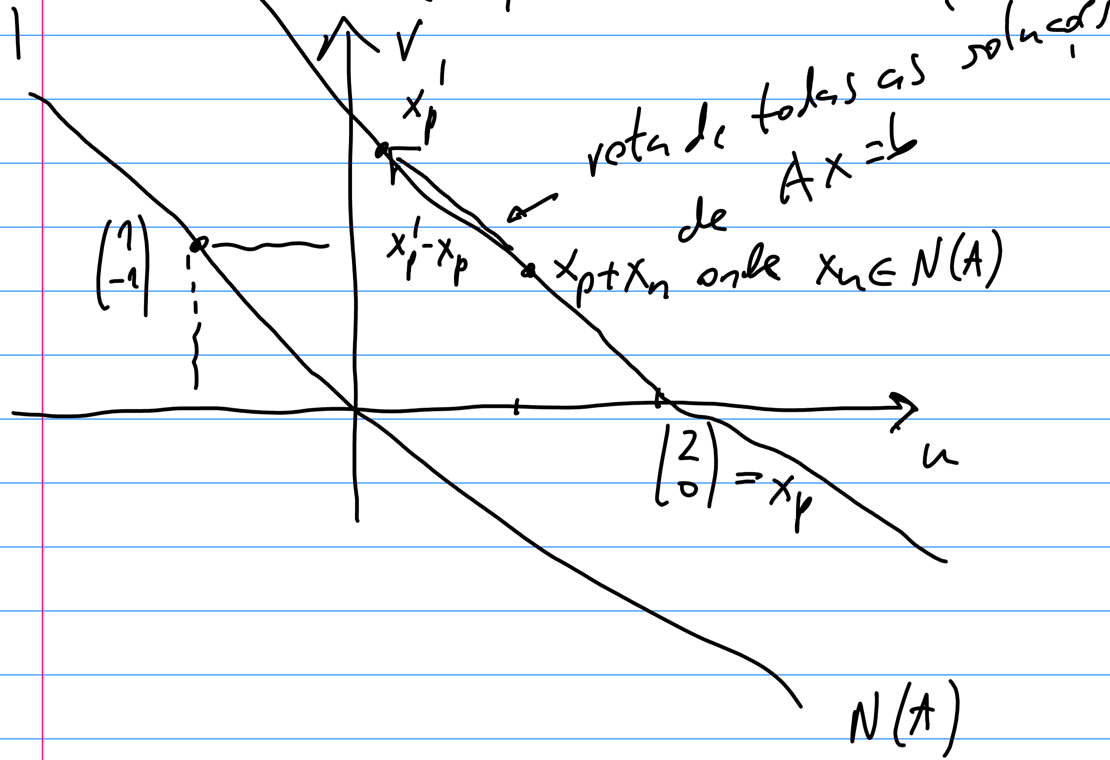
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in N(A) \Leftrightarrow u\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=0 \\ 2u+2v=0 \end{cases} \Leftrightarrow u+v=0 \Leftrightarrow v=-u$

reta em $\mathbb{R}^2$

$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u \in \mathbb{R} \right\}$

retas paralelas — $= \left\{ u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u \in \mathbb{R} \right\}$



Como fica a eliminação de Gauss?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 = b_3 \end{cases}$$

3 eqs, 4 incógnitas ou variáveis

$$(A \;\; b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & b_2 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & b_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot x -2 \quad x-3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

A tem 4 colunas

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & b_3-3b_1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3+b_2-5b_1 \end{array}\right)$$

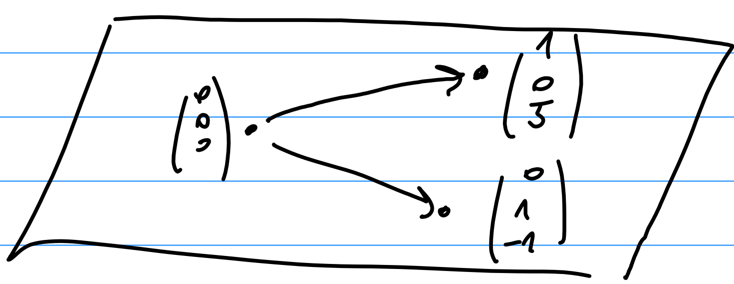
$b \in C(A) \iff Ax=b$ tem solução

$$\iff \boxed{b_3+b_2-5b_1=0}$$

$$C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; b_3 = 5b_1 - b_2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 5b_1-b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\}$$



$C(A) \subset \mathbb{R}^3$

Assumemos agora que $b \in C(A)$, para continuar a análise.

$N(A) = ?$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & & x_3 & & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1, x_3 : variáveis pivôs

x_2, x_4 : variáveis livres

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0$$
$$2x_3 + 2x_4 = 0$$

$$\boxed{x_3 = -x_4}$$

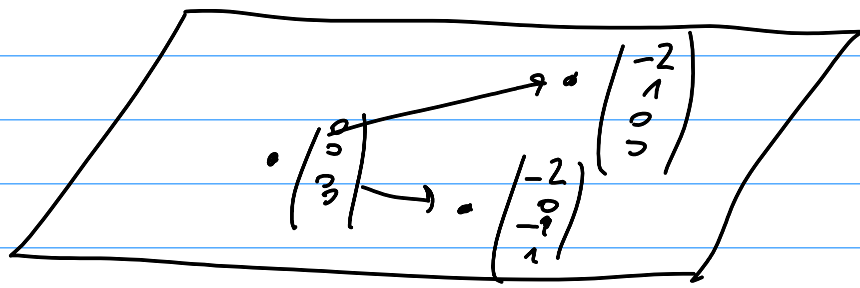
$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 5x_4$$
$$= -2x_2 - 3(-x_4) - 5x_4$$

$$\boxed{x_1 = -2x_2 - 2x_4}$$

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 = -2x_2 - 2x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 - 2x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{pmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$



$N(A) \subset \mathbb{R}^4$

Tomemos, por exemplo, $b = \begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix} \in C(A)$, pois $b_3 = 5b_1 - b_2$

$-6 = 5 \cdot 0 - 6$ ✓.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$b_2 - 2b_1 = 6 - 2 \cdot 0 = 6$

x_1, x_3: variáveis pivô

x_2, x_4: variáveis livres

$$x_1 + \cancel{2x_2} + 3x_3 + \cancel{5x_4} = 0$$

$$2x_3 + \cancel{2x_4} = 6$$

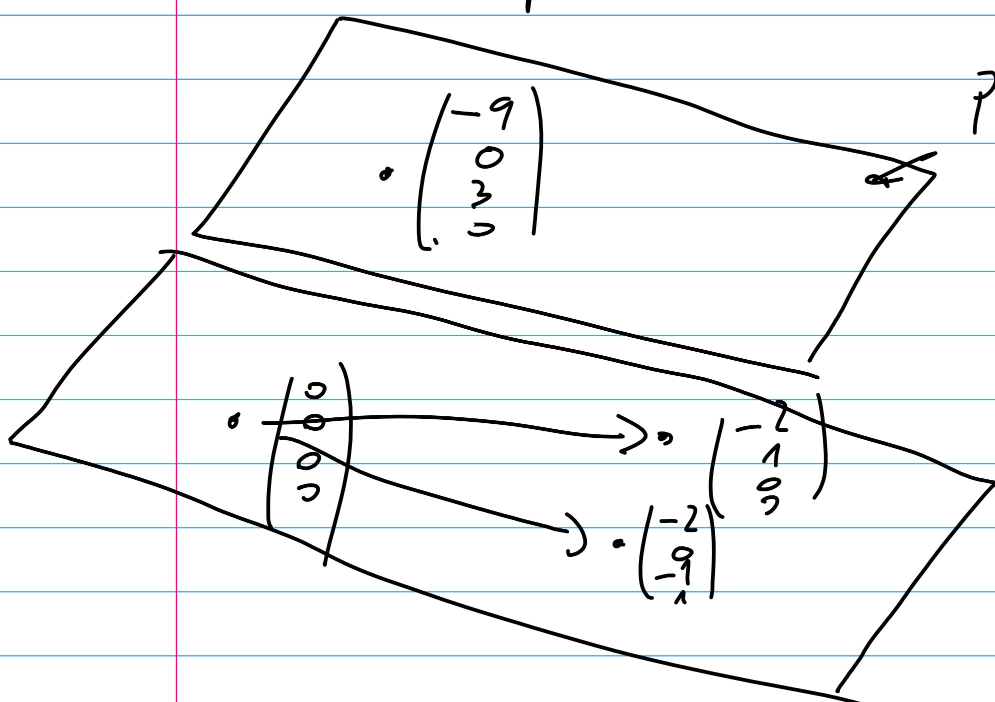
Podemos determinar uma solução particular para este sistema não-homogêneo fazendo as variáveis livres iguais a 0.

$x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 3$ e $x_1 = -9$

$$x_p = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solução geral de $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ é

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= x_p} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in N(A)} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$



Plano das soluções de $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\subset \mathbb{R}^4$

$N(A)$ é paralelo àquele plano.

<u>Obs final</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \div 2$$

$$Z_1 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \times (-3)$$

$$Z_1 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$