ESPAÇOS VETORIAIS

29/04/21

Um espaço vetorial V (sobre $\mathbb{R}$) é um conjunto, cujos elementos são chamados de vetores, onde estão definidas duas operações:

$$V \times V \longrightarrow V$$
$$(u, v) \longmapsto u+v$$

adição de vetores

$$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha, u) \longmapsto \alpha . u$$

multiplicação de vetores por escalares

Além disso, essas operações devem satisfazer uma lista de propriedades:

- $(u+v)+w = u+(v+w)$
- $u+v = v+u$
- $\exists\, 0 \in V \mid \begin{array}{l} v+0 = v \\ 0+v = v \end{array}$
- Dado $v \in V$, $\exists\, -v \in V$ t.q. $v+(-v) = (-v)+v = 0$

- $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta) v$
- $1 . v = v$
- $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
- $(\alpha+\beta) u = \alpha u + \beta u$

Exemplos de espaços vetoriais

1. $\mathbb{R}^2 = V$

$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

Def. $\begin{cases} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \end{cases}$

$$(y_1, y_2) \underset{=}{+} (x_1, x_2) \overset{def}{=} (\underbrace{y_1 + x_1}, \underbrace{y_2 + x_2})$$

adição em $\mathbb{R}$ é comutativa

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\overset{def}{=} (x_1, x_2) \underset{=}{+} (y_1, y_2)$$

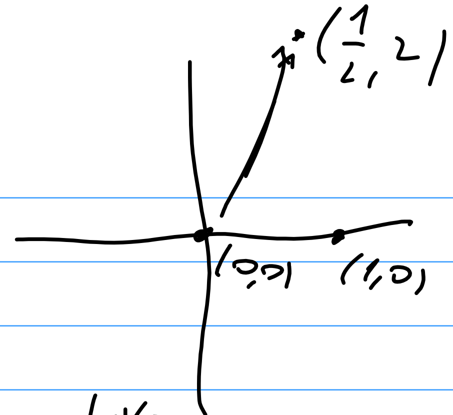
Então vale a propriedade comutativa em $\mathbb{R}^2$

E analogamente mostram-se as demais propriedades das operações em $\mathbb{R}^2$.

Vetor nulo em $\mathbb{R}^2$: $(0, 0)$

Vetor oposto de (x_1, x_2) é $(-x_1, -x_2)$

Representação geométrica



2. $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ n inteiro positivo

Perdemos a interpretação geométrica

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

3. $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}\}$

4. $\mathbb{R}^0 = \{0\}$

5. $M(2\times 3, \mathbb{R})$: matrizes reais 2×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M(m\times n, \mathbb{R})$

$M(m\times n, \mathbb{C})$

6. Espaços de funções

V: todas as funções $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$(2f)(x) = 2 \operatorname{sen} x$

$\to (f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$x \in [0, 1]$

$\in \mathbb{R}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\to (\underline{\alpha f})(x) := \alpha \cdot f(x)$ $\quad \underline{f}: [0,1] \to \underline{\mathbb{R}}$

V: todas as funções contínuas $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

Soma de duas fns. contínuas é contínua

Múltiplo escalar de uma fn contínua é contínua

7. Espaços de polinômios

$P_n(\mathbb{R})$: polinômios com coeficientes reais e grau no máximo n, mais o polinômio nulo.

$P_2(\mathbb{R}) = \{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$

$P_\infty(\mathbb{R})$: todos os polinômios com coef reais.

$$\underbrace{\alpha}_{\neq 0}\underbrace{(ax^2+bx+c)}_{} = \underbrace{(\alpha a)}_{}x^2 + \underbrace{(\alpha b)}_{}x + \underbrace{(\alpha c)}_{}$$

—//—

Vale sempre:

V esp vet $\quad v \in V \quad \underbrace{0}_{} \in \mathbb{R}$

escalar nulo

$$\underbrace{0}_{}\cdot v = (0+0)v$$

$$= 0\cdot v + 0v$$

$$0v + (-0v) = (0v + 0v) + (-0v)$$

vetor nulo $\rightarrow 0 = 0v + \underbrace{(0v + (-0\cdot v))}_{}$

$$0 = 0v + 0$$

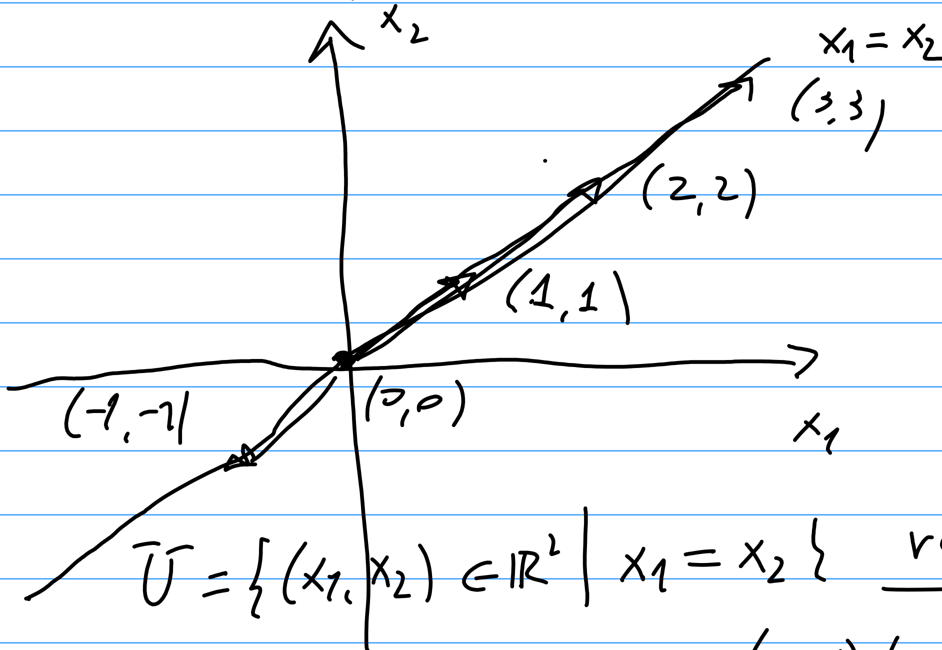
vetor nulo

$$\boxed{0 = 0v}$$

—//—

SUBESPAÇOS VETORIAIS

$V = \mathbb{R}^2$ espaço vetorial



$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$ reta

$(-1)(1,1) = (-1,-1)$

$(1,1) + (2,2) = (3,3)$

$$\underbrace{(a,a)}_{=} + \underbrace{(b,b)}_{=} = \underbrace{(a+b, a+b)}_{\therefore =}$$

$$\alpha \underbrace{(a,a)}_{=} = \underbrace{(\alpha a, \alpha a)}_{\therefore =}$$

Conclusão: U é fechado para as operações de esp vet de V, no sentido que

adição em V

$\underline{u}, \underline{v} \in U \Rightarrow \underline{u} + \underline{v} \in \underline{U}$

$\underline{u \in U}, \ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot u \in U$

mult p/ escalar em V

Def Seja V um espaço vetorial.
Um subespaço de V é um subconjunto (não-vazio) de V que é fechado para as operações em V

Obs. Se U é um subespaço de V então o vetor nulo de V necessariamente pertence a U.

$U \neq \emptyset \qquad u \in U$

$$0 = 0 \cdot u \in U$$

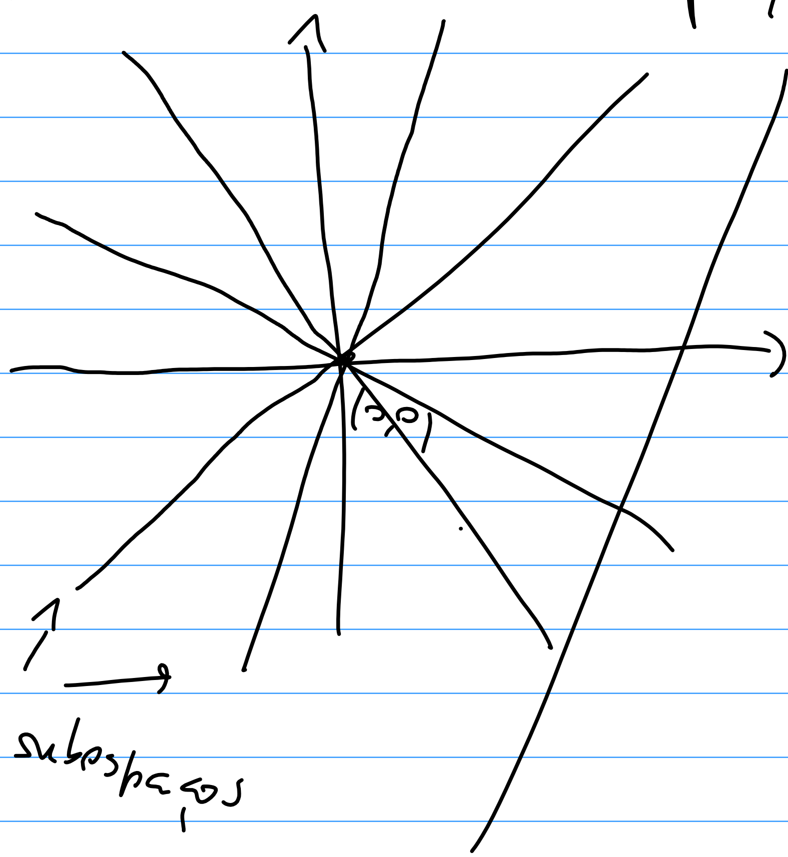
vetor nulo de V

U é subespaço

Obs. Se U é um subespaço de um esp vetorial V, então U é ele mesmo um espaço vetorial.

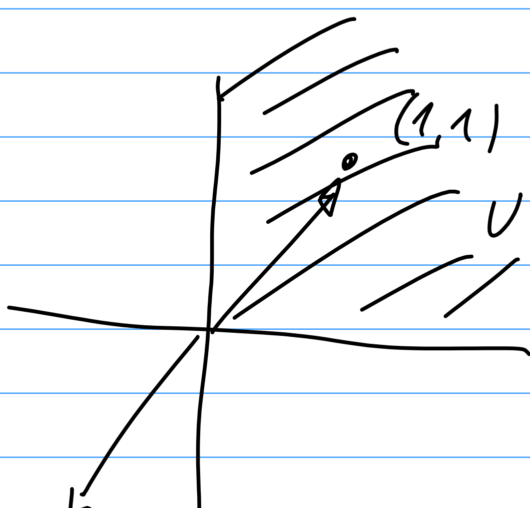
Exemplos e contra-exemplos

1. Quais são os subespaços de $\mathbb{R}^2$?



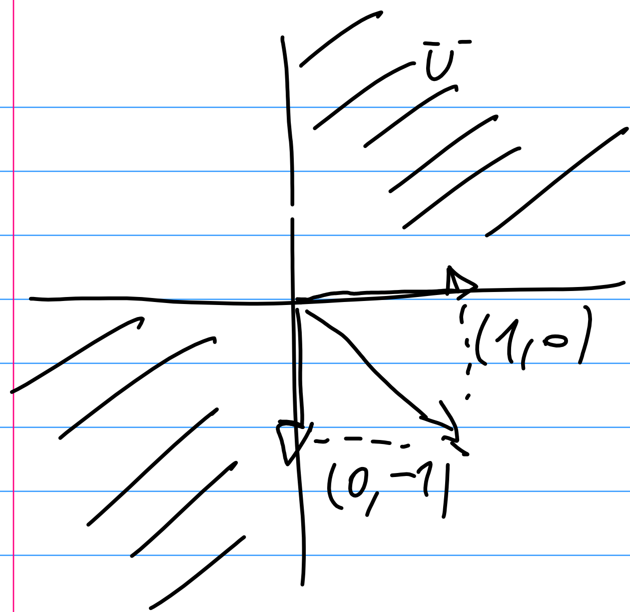
← Não é

São subespaços



Não é

$(-1)\cdot(1,1) \notin U$



Não é

$$\underbrace{(1,0)}_{\in U} + \underbrace{(0,-1)}_{\in U} = \underbrace{(1,-1)}_{\notin U}$$

$\mathbb{R}^2$ é um subespaço de si mesmo

$\{0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$

Obs. Para todo esp vetorial $\bar{V}$, sempre $\{0\}$ e $\bar{V}$ são subespaços de $\bar{V}$.

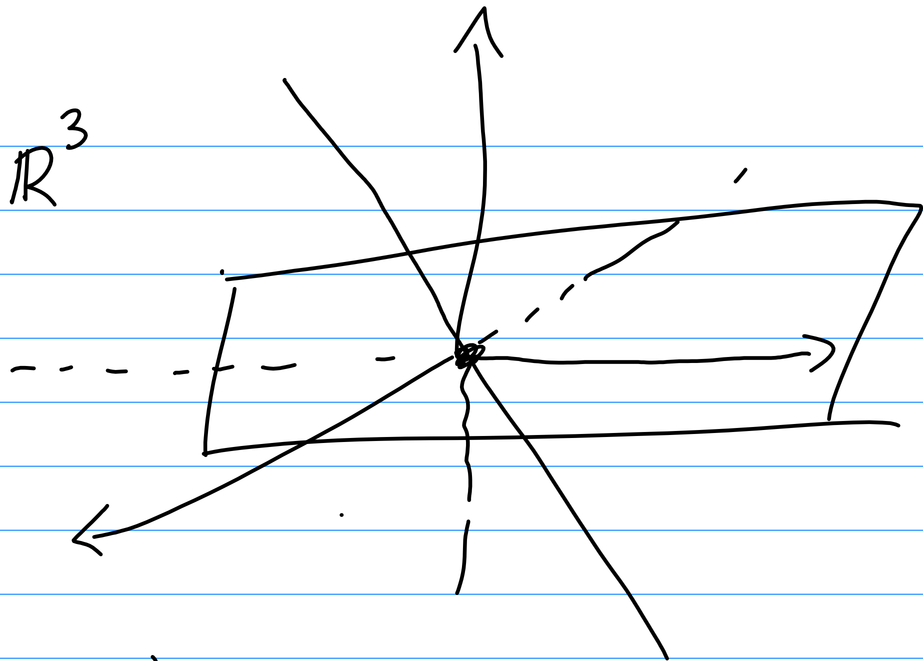
2. $M(2\times 3, \mathbb{R})$ esp vet

$\cup$

$M(2\times 3, \mathbb{Z})$ não é subespaço,

pois $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

3. $\mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^3$, $\{0\}$

Todas as retas pela origem

Todos os planos pela origem.

4. $V = M(3\times 3, \mathbb{R})$ esp vet

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \middle| \; a, b, \dots, f \in \mathbb{R} \right\}$$

matrizes triangulares superiores é um subespaço de V

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

5. $V = M(n \times n, \mathbb{R})$

U : matrizes simétricas

É um subespaço

$$A, B \in U \Rightarrow (A+B)^t = \underbrace{A^t}_{=A} + \underbrace{B^t}_{=B}$$

$A = A^t$, $B = B^t$

$$= A + B$$

$$\Rightarrow A + B \in U$$

$$A \in U, \ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha A)^t = \alpha \underbrace{A^t}_{=A}$$

$A = A^t$

$$= \alpha A$$

$$\Rightarrow \alpha A \in U$$

U' : matrizes antisimétricas $A^t = -A$ ← É subespaço

$$A, B \in U' \Rightarrow (A+B)^t = A^t + B^t = (-A) + (-B)$$
$$= -(A+B)$$

$$\Rightarrow A+B \in U'$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in U'$ $\Rightarrow (\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha(-A)$

$$= -(\alpha A)$$

$$\Rightarrow \alpha A \in U'$$

U'': matrizes invertíveis

Não é subespaço, pois a matriz nula não é invertível.

Seja V um esp vetorial e seja U um subcj. de V. Condições para U ser um subespaço de V:

- $0_V \in U$
- $u, v \in U \Rightarrow u \underset{V}{+} v \in U$
- $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \alpha \underset{V}{\cdot} u \in U$

p. 79 [edição em inglês]

§2.1

subseção

Vamos começar "O espaço-coluna de A" na próxima aula.