ALGORITMO DE GAUSS-JORDAN 27/04/21

Seja A uma matriz quadrada.

Def. Uma matriz inversa de A é uma matriz B tal que

$$AB = BA = I \text{ (matriz identidade)}$$

Nem toda matriz é invertível.

Exemplo.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Não existe inversa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & \underset{\forall a,b,c,d}{\underset{\equiv}{0}} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

—||—

Mas, se A admitir uma inversa, então ela será única.

Dem Suponhamos que B e C são inversas de A. Então

$$B = BI \underset{\text{C é inversa de A}}{=} B(AC) = (BA)C \overset{\text{B é inversa de A}}{=} IC = C$$

$\therefore\ B = C$ //.

Se A admite uma matriz inversa, como ela é única, denotarêmo-la por A^{-1}.

—//—

Consideremos o sistema linear $Ax = b$
Se A é invertível, então o sistema tem solução e a solução é única.

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I}x = A^{-1}b \Rightarrow Ix = A^{-1}b$$

$$\therefore\ x = A^{-1}b$$

—//—

Se $Ax = 0$ para algum vetor $\underline{\underline{x \neq 0}}$, então A não é invertível.

__Dem:__ Se A fosse invertível, então

$x = A^{-1}(0) = 0$ ↯ (uma contradição)

Logo, A não é invertível. //.

—//—

Caso 2x2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é invertível se e somente se $ad - bc \neq 0$. Neste caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

—//—

Caso de uma matriz diagonal

Se $A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ é uma matriz diagonal

e $d_1, \ldots, d_n \neq 0$ então $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{pmatrix}$.

—//—

Supunhamos que A, B são invertíveis.

Então nada se pode afirmar sobre a invertibilidade de $A+B$.

$I^{-1} = I$. $\quad -I^{-1} = -I$

$I + I = 2I \qquad (2I)^{-1} = \frac{1}{2} I$

$I + (-I) = 0 \qquad 0$ não é invertível

Por outro lado, o produto AB sempre é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

De fato:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

$$= A I A^{-1}$$
$$= A A^{-1}$$
$$= I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$$
$$= B^{-1} I B$$
$$= B^{-1} B$$
$$= I \;//$$

O algoritmo de Gauss-Jordan

Dada uma matriz quadrada A (ordem n), como determinar se A é invertível e, em caso afirmativo, como calcular A^{-1}?

Precisamos resolver

$$AX = I$$

em X, onde X é uma matriz de ordem n.

$$AX = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(e_1 \; e_2 \cdots e_n \right).$$

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ colunas de I

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \qquad x_1, x_2, \dots, x_n$$

colunas de X

$$A \left(\boxed{x_1}\,\boxed{x_2} \cdots \boxed{x_n} \right) = \left(\boxed{e_1}\,\boxed{e_2} \cdots \boxed{e_n} \right)$$

$\Leftrightarrow Ax_1 = e_1, \; Ax_2 = e_2, \; \dots, \; Ax_n = e_n$

n sistemas lineares

Ex.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (A \;\; I)$$

$\times(-2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (FEA, FEI)$$

E, F, G matrizes elementares da aula passada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad (\underbrace{GFEA}_{=U}, \underbrace{GFE}_{=L^{-1}})$$

$\times 2$

$\times(-1)$

Na aula passada: $(GFE)^{-1} = E^{-1}F^{-1}G^{-1} = L$ $\quad (U, L^{-1})$

$$\left(U^{-1}U \quad U^{-1}L^{-1}\right)$$

$$\left(I \quad A^{-1}\right)$$

$$\times\tfrac{1}{8}\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \div 2 \\ \div -8 \\ \div 1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3/2 & -5/8 & -3/4 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Todos pivos $\neq 0$

$\therefore$ A é invertível.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -5/16 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/8 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -5/16 & -3/8 \\ 1/2 & -3/8 & -1/4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad //.$$

MATRIZ TRANSPOSTA

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A^t)^t = A$$

—||—

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t$$

$$(AB)^t = \underline{B^t A^t}$$

Verificação:

$$A = (A_{ij}) \qquad B = (B_{ij})$$

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

$$\rightarrow ((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki}$$

$$(A^t)_{ij} \overset{*}{=} A_{ji} \qquad (B^t)_{ij} \overset{**}{=} B_{ji}$$

$$\rightarrow (B^t A^t)_{ij} = \sum_k (B^t)_{ik} (A^t)_{kj}$$

$$\overset{*,\,**}{=} \sum_k B_{ki} A_{jk} = \sum_k A_{jk} B_{ki}$$

$$=$$

$\Rightarrow ((AB)^t)_{ij} = (B^t A^t)_{ij}$

$$\therefore (AB)^t = B^t A^t$$

Daí segue que:

Se A é invertível, $AA^{-1} = I$

$$\Rightarrow (A \cdot A^{-1})^t = I^t \Rightarrow \underbrace{(A^{-1})^t A^t = I}$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

—//—

Uma matriz quadrada A é chamada de:

- simétrica se $A^t = A$;
- anti-simétrica se $A^t = -A$.

Exs.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ são simétricas

- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ são anti-simétricas.

- $\underset{m \times n}{A} \underset{n \times m}{A^t}$ sempre é simétrica, para toda matriz A $m \times n$.

$$(AA^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = AA^t$$

O mesmo vale para A^tA

Seções do livro cobertas:

§ 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6