ELIMINAÇÃO DE GAUSS

22/04/21

$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \quad \times -2 \\ 4u - 6v \quad &= -2 \\ -2u + 7v + 2w &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ -8v - 2w &= -12 \\ 8v + 3w &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ -8v - 2w &= -12 \\ w &= 2 \end{aligned}$$

Sistema linear <u>equivalente</u> ao dado, mas agora na forma <u>triangular</u> (superior)

Todos os coeficientes abaixo da diagonal são <u>nulos</u>.

O sistema linear <u>triangular superior</u> é (ou <u>escalonado</u>)

resolvido "de baixo para cima":

$w = 2$

$-8v - 4 = -12 \Rightarrow v = 1$

$2u + 1 + 2 = 5 \Rightarrow u = 1$

Solução $(u, v, w) = (1, 1, 2)$ //

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad \times -2 \quad + \quad + \quad \text{etc.}$$

—//—

Quando é que a eliminação de Gauss emperra?

Ex 1.
$$\begin{aligned} u + v + w &= b_1 \quad \times -2 \quad \times -4 \\ 2u + 2v + 5w &= b_2 \quad + \\ 4u + 6v + 8w &= b_3 \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u + v + w &= b_1 \\ 0 \quad 3w &= b_2 - 2b_1 \\ 2v + 4w &= b_3 - 4b_1 \end{aligned}$$

Permutação de duas linhas

$$\begin{aligned} \underline{\underline{1}}u + v + w &= b_1 \\ \underline{\underline{2}}v + 4w &= b_3 - 4b_1 \end{aligned}$$

$$3w = b_2 - 2b_1$$

Pivôs

Ex 2
$$\begin{aligned} u + v + w &= b_1 \quad \times(-2),\ \times(-4) \\ 2u + 2v + 5w &= b_2 \\ 4u + 4v + 8w &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1u + v + w &= b_1 \quad (1) \\ 0v + 3w &= b_2 - 2b_1 \quad (2) \\ 4w &= b_3 - 4b_1 \quad (3) \end{aligned}$$

!

$(3) \Rightarrow w = \frac{1}{4}(b_3 - 4b_1)$

$(2) \Rightarrow w = \frac{1}{3}(b_2 - 2b_1)$.

Há dois casos:

(i) Se $\frac{1}{4}(b_3 - 4b_1) \neq \frac{1}{3}(b_2 - 2b_1)$, então o sistema não tem soluções.

(ii) Se $\frac{1}{4}(b_3 - 4b_1) = \frac{1}{3}(b_2 - 2b_1)$, as eqs (2) e (3) são equivalentes, a eq. (1) só dá uma relação entre u e v, e o sistema tem infinitas soluções.

—//—

NOTAÇÃO MATRICIAL

$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ 4u - 6v &= -2 \\ -2u + 7v + 2w &= 9 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matriz de coeficientes} \\ A}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

matriz-coluna ou vetor-coluna incógnita

x

termo constante

b

$$Ax = b$$

$$u \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\underset{m \times n}{A} \; \underset{n \times 1}{x} = \underset{m \times 1}{b}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

para $i = 1, \ldots, m$

—//—

ELIMINAÇÃO DE GAUSS COM MATRIZES

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{E}\underbrace{\begin{pmatrix}2&1&1\\4&-6&0\\-2&7&2\end{pmatrix}}_{=A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-8&-2\\-2&7&2\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}_{F}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-8&-2\\-2&7&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-8&-2\\0&8&3\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{G}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-8&-2\\0&8&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-8&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

matriz triangular superior U
("upper")

$$G(F(EA)) = U$$

$$GFEA = U$$

$$(GFE)A = U \leftarrow$$

A multiplicação de matrizes é associativa, mas não é comutatividade.

$$GFE = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz triangular inferior

E, F, G matriz elementares $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

diferem da matriz identidade por um coeficiente fora da diagonal.

Os passos da eliminação de Gauss são reversíveis. Isso corresponde às matrizes elementares serem inversíveis.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \underline{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E E^{-1} = E^{-1} E = I$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \underline{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ou seja:

$$G(F(E\,A)) = U$$

$$\underbrace{G^{-1} G}_{=I} (F(EA)) = G^{-1} U$$

$$F(EA) = G^{-1} U$$

$$\underbrace{F^{-1} F}_{=I} (EA) = F^{-1} (G^{-1} U)$$

$$EA = F^{-1}(G^{-1}U)$$

$$A = E^{-1}(F^{-1}(G^{-1}U))$$

$$A = \underbrace{(E^{-1}F^{-1}G^{-1})}_{\text{produto de matrizes triangulares inferiores}}U$$

é uma matriz triangular inferior L

("lower")

$$L = E^{-1}F^{-1}G^{-1}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Conclusão</u>: $\quad A = LU$

onde $\begin{cases} L \text{ é triangular inferior} \\ U \;\;\text{"}\;\;\;\text{"}\;\;\; \text{superior} \end{cases}$

No exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dado o sistema linear na forma matricial

$$Ax = b$$

$$\underbrace{(GFE)A}_{=U} x = \underbrace{(GFE)b}_{=c}$$

$$Ux = c$$

Resolvemos em x.

$$c = GFEb$$

$$\underbrace{E^{-1}F^{-1}G^{-1}}_{=L} c = b$$

Dado $\boxed{Ax=b}$,

resolvemos $Lc = b$ em $\underline{\underline{c}}$, (forma triangular)

resolvemos $Ux = c$ em $\underline{\underline{x}}$ (forma triangular)

Quebramos $Ax=b$ em dois sistemas triangulares.

$$A = LU$$

$U = DU'$

D diagonal

U' triang sup

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= L\, D\, U'$$

Se $A = LU$ onde L e U têm coefs diagonais não nulos então A é invertível e

$$A^{-1} = U^{-1} L^{-1}$$

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1} b$$

$$= U^{-1} L^{-1} b$$

—//—

Matriz de permutação

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

<u>Resumo</u>: No caso <u>não-singular</u> (isto é, no caso em que eliminação de Gauss "funciona"), existe uma matriz de permutação P tal que PA pode ser fatorada na forma LU, onde L é triangular inferior e U é triangular superior.

$$\boxed{PA = LU}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{1} & \underline{1} & \underline{3} \\ \underline{2} & \underline{5} & \underline{8} \end{pmatrix} \quad \times -1 \quad \times -2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \times -2 \quad \times -1$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U$$

A

$\rightsquigarrow$

$$PFEA = U$$

$$PF(P^{-1}P)E(P^{-1}P)A = U$$

$$\underbrace{(PFP^{-1})}_{=F'}\underbrace{(PEP^{-1})}_{=E'}PA = U$$

$$F'E'(PA) = U$$