www.ime.usp.br/~gorodski/teaching/

$\boxed{\text{G. STRANG}}$

mat2116 − 2021

MAT2116 − IQ

20/04/21

ÁLGEBRA LINEAR

AULA 1 MATRIZES E ELIMINAÇÃO DE GAUSS

$\boxed{\text{Resolver equações lineares}}$

$$\begin{cases} 1.x + 2y = 3 & (1) \\ 4x + 5y = 6 & (2) \end{cases}$$

2 equações lineares

2 incógnitas: x, y

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

(2) − 4(1):

$$\begin{array}{r} \cancel{4x} + 5y = 6 \\ - \quad \cancel{4x} + 8y = 12 \\ \hline 3y = 6 \end{array} \Rightarrow y = 2$$

Substituição: $x + 2.2 = 3 \Rightarrow x = -1$

Solução: $(x,y) = (-1,2)$

Determinantes

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\6\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\5\end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix}1\\4\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}3\\6\end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{15-12}{5-8} = \frac{+3}{-3} = -1 \qquad = \frac{6-12}{5-8} = \frac{-6}{-3} = 2$$

—//—

GEOMETRIA DE SISTEMAS LINEARES

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$$

Eliminação de Gauss: $(1)+(2)$

$$\begin{array}{r} 2x - \cancel{y} = 1 \\ x + \cancel{y} = 5 \\ \hline 3x = 6 \end{array}$$

$\Rightarrow x = 2$

(2): $2 + y = 5 \Rightarrow y = 3$

Solução:

$(x,y) = (2,3)$

Há duas maneiras de pensar na "geometria":

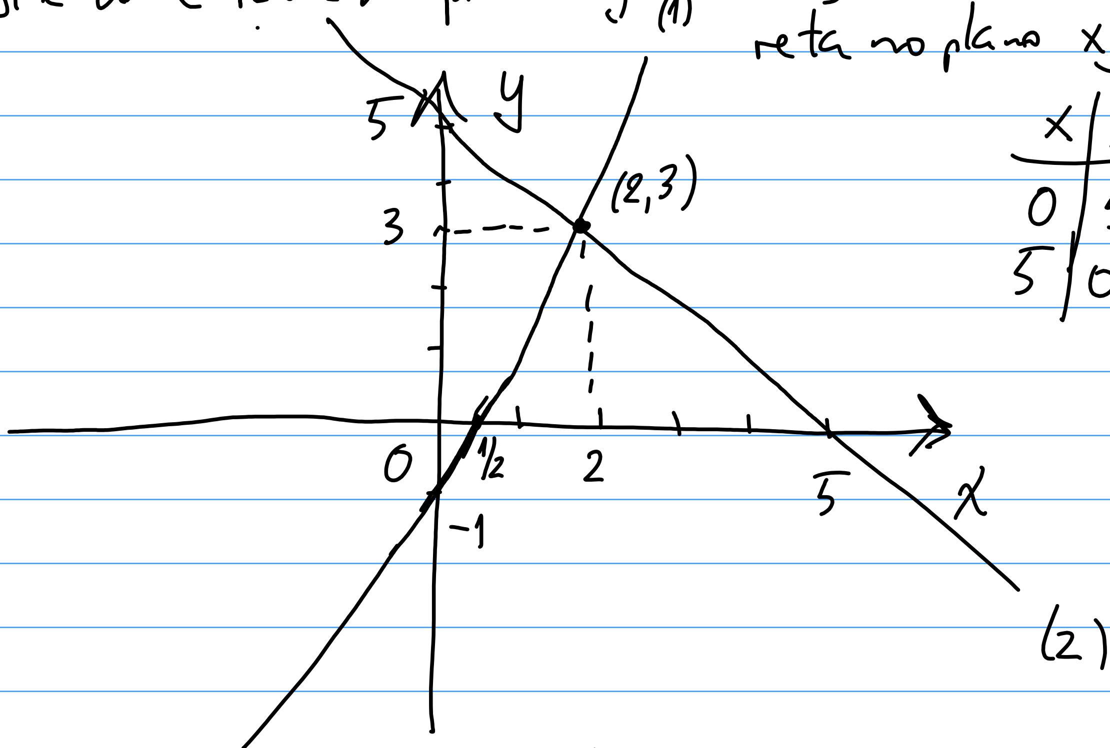
1. Linhas do sistema

$2x - y = 1$ define uma reta no plano xy (1)

$x + y = 5$ define uma reta no plano xy

x	y
0	-1
$1/2$	0

x	y
0	5
5	0



Intersecção das duas retas é um ponto $(2,3)$. É o único ponto que está nas duas retas

$(2,3)$ é o único par ordenado que satisfaz as duas eqs. lineares, (1) e (2)

2. Colunas do sistema

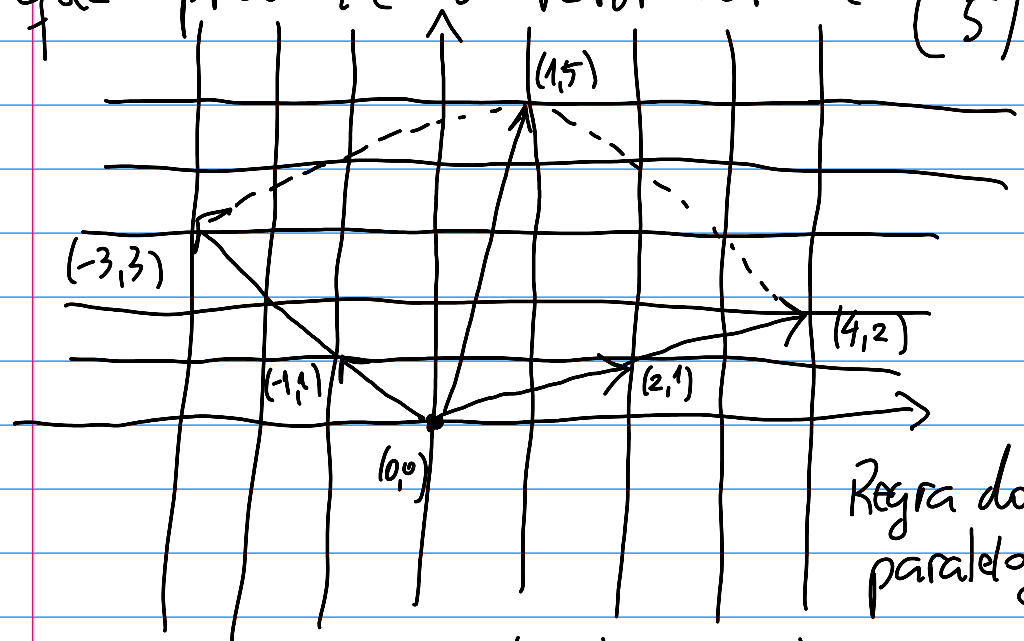
$$\begin{cases} 2x - 1y = 1 \\ 1x + 1y = 5 \end{cases}$$

$$x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

matriz-coluna
ou
vetor-coluna

Buscamos uma combinação linear dos vetores-coluna $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

que produza o vetor-coluna $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$.



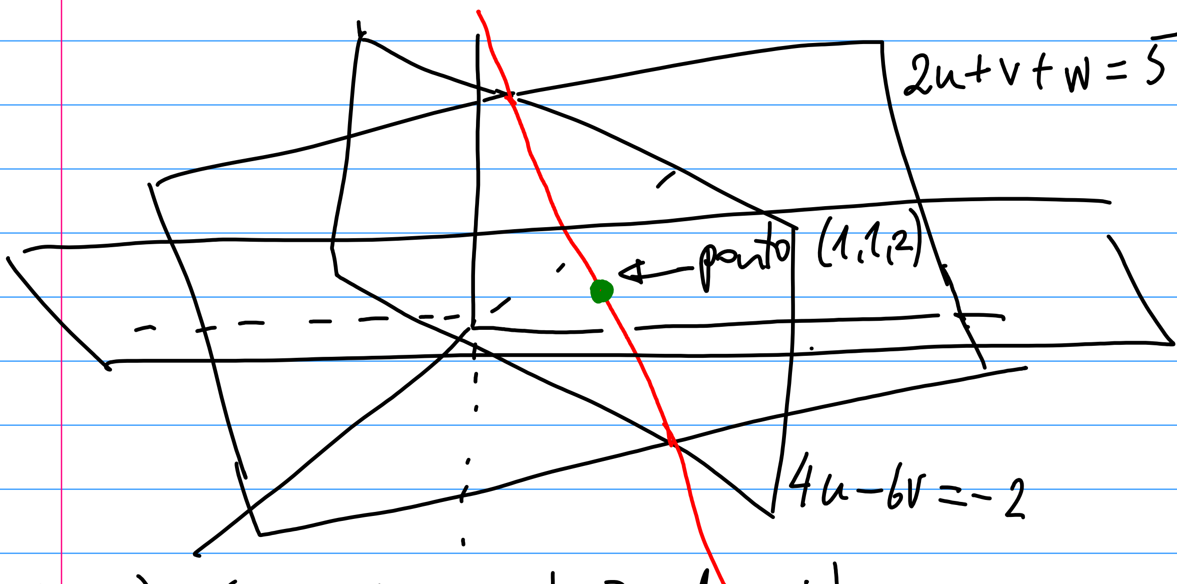
Regra do paralelogramo

$$2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

— // —

$$\begin{cases} 2u + v + w = 5 \\ 4u - 6v = -2 \\ -2u + 7v + 2w = 9 \end{cases}$$

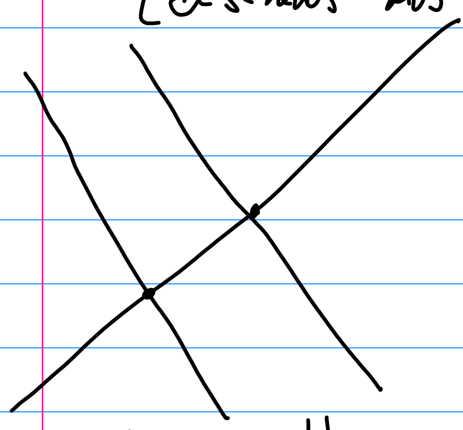
<u>Linhas</u> $\quad u, v, w \quad \mathbb{R}^3$



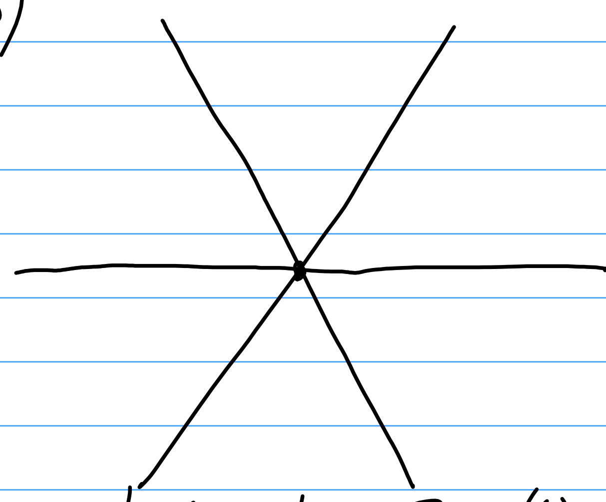
$(1,1,2)$ é a única solução do sistema

Em geral, existem várias configurações possíveis de 3 planos em $\mathbb{R}^3$:

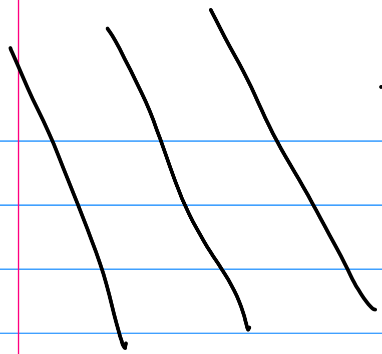
(Desenhos dos <u>perfis</u>)



2 planos paralelos
∄ solução (a)

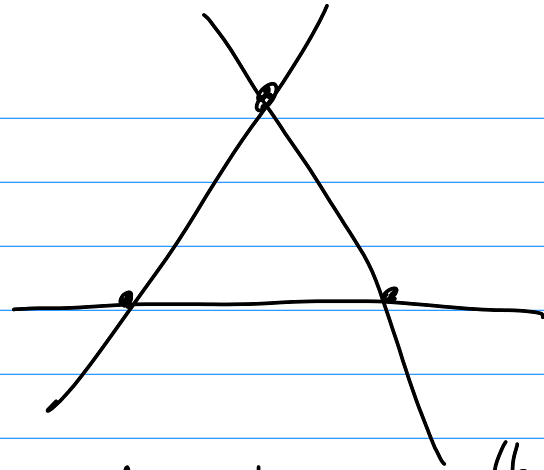


reta de intersecção (c)
∃ infinitas soluções



3 planos paralelos

∄ solução (d)



(b)

cada 2 planos se encontram em exatamente uma reta

∄ soluções

$$\begin{cases} 1u+v+w=2 & (1) \\ 2u \quad + 3w = 5 & (2) \\ 3u+v+4w=6 & (3) \end{cases}$$

é um sistema linear no caso (b)

7

O que acontece se tentarmos aplicar a eliminação de Gauss?

$(1)+(2) \qquad 3u+v+4w=7 \Rightarrow 7=6$ ↯

$(3) \qquad 3u+v+4w=6$

Isso mostra que o sistema não tem solução.

Obs. $\begin{cases} u+v+w=2 & (1) \\ 2u \quad +3w=5 & (2) \end{cases}$ ∃ solução

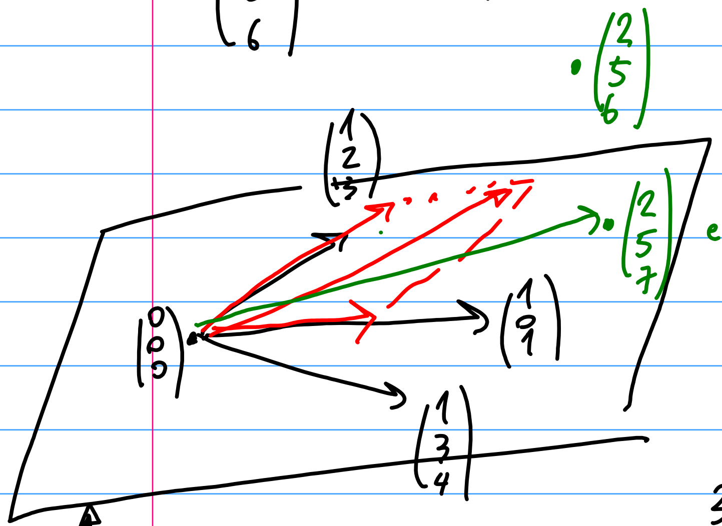
Em geral: Planos $au+bv+cw=d$, $a'u+b'v+c'w=d'$ no espaço uvw

são paralelos $\iff$ $\begin{aligned} a' &= \lambda a \\ b' &= \lambda b \\ c' &= \lambda c \end{aligned}$ para algum $\lambda \neq 0$

Colunas

$$u\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = b$$

$b = \begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$ é impossível $\qquad$ $b = \begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}$ é possível.



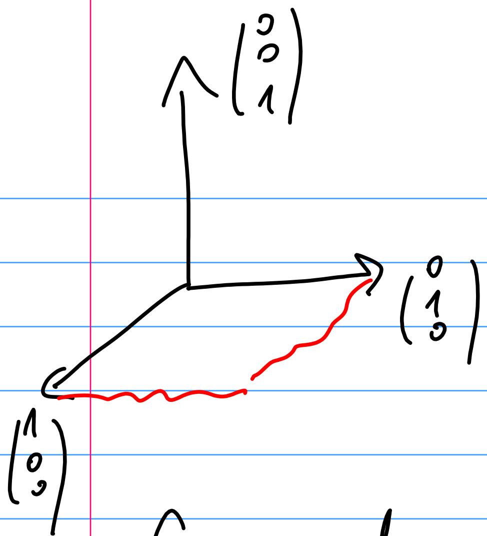
$$\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{2}u + \left(-\frac{1}{2}\right)v = w$$

w já é uma combinação linear de u e v.

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ são 3 vetores paralelos a um mesmo plano.

Qualquer combinação linear desses 3 vetores será também paralela a esse mesmo plano.



Comparando a geometria das linhas com a geometria das colunas, nós intuímos:

Se n hiperplanos em $\mathbb{R}^n$ não têm ponto em comum, ou se têm infinitos pontos em comum, então as colunas são todas paralelas a um mesmo hiperplano em $\mathbb{R}^n$.