MAT122 – Álgebra Linear – IF
Lista de Exercícios 9 – 23/06/2022

Prof. Claudio Gorodski

`Depositar no Google Classroom até 30/06, às 17h, impreterivelmente, as resoluções dos exercícios marcados com *.`

1. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ com $(T-2I)(T-3I)(T-4I)v = 0$ para todo $v \in V$. Mostre que todo autovalor de T pertence ao conjunto $\{2,3,4\}$.

2. Seja $P \in \mathcal{L}(V)$ com $P^2 = P$. Mostre que $V = \ker P \oplus \operatorname{im} P$.

3. Suponha que $T \in \mathcal{L}(V)$ é diagonalizável, e mostre que $V = \ker T \oplus \operatorname{im} T$.

4. Suponha que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ com autoespaço $V_T(8)$ de dimensão 4. Mostre que $T - 2I$ ou $T - 6I$ é invertível.

5. Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, V está equipado com produto interno e sejam S, $T \in \mathcal{L}(V)$ simétricos. Mostre que ST é simétrico se e somente se $ST = TS$.

6. Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, V está equipado com produto interno, fixe u, $v \in V$, e considere $T \in \mathcal{L}(V)$ dado por $Tx = \langle x, u\rangle v$ para $x \in V$. Mostre que T é simétrico se e somente se u, v é LI.

7. Seja $V = \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$, com $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$, e considere o subespaço $U = [1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx]$. Mostre que $T \in \mathcal{L}(U)$ definido por $Tf = f''$ é simétrico.

8. Determinar os autovalores de $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ onde:

   a. $[T]_{can} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$.

   b. $[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   c. $[T]_{can} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -3 & -7 & -3 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Determinar todos os valores de m e n para os quais a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 3 & n & 2 \end{pmatrix}$$

é semelhante a uma matriz diagonal.

*10. No $\mathbb{R}^3$ com o produto escalar usual, considere o operador linear T dado por

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observar que $[T]_{can}$ é uma matriz simétrica e determinar uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.