MAT122 – Álgebra Linear – IF
Lista de Exercícios 8 – 12/06/2022

Prof. Claudio Gorodski

`Depositar no Google Classroom até 16/06, às 17h, impreterivelmente, as resoluções dos exercícios marcados com *.`

1. Sejam $S, \in \mathcal{L}(V)$ com $ST = TS$. Mostrar que $\ker S$ e $\operatorname{im} S$ são subespaços invariantes por T.

2. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ e sejam $U_1, \ldots, U_m$ subespaços invariantes por T. Mostrar que $U_1 + \cdots + U_m$ é invariante por T.

2. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ e sejam $\{U_i\}_{i \in I}$ uma coleção de subespaços invariantes por T, onde I é um conjunto de índices. Mostrar que $\cap_{i \in I} U_i$ é invariante por T.

3. Verdadeiro ou falso? Se $\dim V < \infty$ e U é um subespaço de V que é invariante por todo operador em V, então $U = \{0\}$ ou $U = V$.

4. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definido por $T(x, y) = (-3y, x)$. Calcular os autovalores de T (em $\mathbb{C}$).

5. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$ definido por $T(x, y) = (y, x)$. Calcular os autovalores de T e autovetores de T.

6. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4(\mathbb{R}))$ definido por $(Tp)(x) = xp'(x)$. Calcular os autovalores e autovetores de T.

7.

a. Mostre que o "forward shift" $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^\infty)$ definido por

$$T(z_1, z_2, \ldots) = (0, z_1, z_2, \ldots)$$

não possui autovalores.

b. Calcular todos os autovetores e autovalores do "backward shift" $S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^\infty)$ definido por

$$S(z_1, z_2, \ldots) = (z_2, z_3, \ldots)$$

8. Sejam $S, T \in \mathcal{L}(V)$ onde S é invertível.

a. Mostrar que T e $S^{-1}TS$ têm os mesmos autovalores.

b. Qual é a relação entre os autovetores de T e de $S^{-1}TS$?

9. Suponha que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ e -4, 5 e $\sqrt{7}$ são autovalores de T. Mostre que existe $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $Tx - 9x = (-4, 5, \sqrt{7})$.

*10. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ com

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Calcular os autovalores de T e determinar uma base B de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Qual é a matriz $[T]_B$? Qual é a relação entre $[T]_B$ e $[T]_{can}$?