MAT122 – Álgebra Linear – IF
Lista de Exercícios 7 – 26/05/2022

PROF. CLAUDIO GORODSKI

1. Calcular uma base ortonormal para o subespac co U do espaço V com produto interno $\langle , \rangle$ em cada caso:

a. $U = [(0, 1, 1), (-1, 0, 2)]$, $V = \mathbb{R}^3$, $\langle , \rangle$ é o produto escalar usual.

b. $U = [x, e^x]$, $V = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$.

2. Seja $U = [x^2 - x]$ subespaço de $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

a. Determinar $U^\perp$.

b. Determinar uma base ortonormal para $U^\perp$.

3. Seja $V = \mathbb{R}^4$ com o produto escalar usual e considere o subespaço $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + w = 0,\ 2x + y = w\}$.

a. Determinar uma base para U.

b. Determinar uma base ortonormal para $U^\perp$.

4. Em $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ considere o subespaço $U = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Calcular a projeção ortogonal $P_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}(t^2 - 1)$ onde:

a. $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$.

b. $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$.

Interprete os resultados.

5. Determinar a, b, $c \in \mathbb{R}$ que minimizam o valor de $\int_0^1 (\sqrt{x} - (ax^2 + bx + c))^2\, dx$. (Sugestão: Tomar $V = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$, $U = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$.)

6. Determinar a reta $y = ax + b$ (a, $b \in \mathbb{R}$) que melhor se ajusta aos pontos

$$(x_1, y_1) = (-1, -10),\ (x_2, y_2) = (0, -6),\ (x_3, y_3) = (1, -4),\ (x_4, y_4) = (2, -2),$$

no sentido de minimizar $\sum_{i=1}^4 (y_i - (ax_i + b))^2$. (Sugestão: Tomar $V = \mathcal{C}([-1, 2]; \mathbb{R})$, $U = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ e $\langle f, g\rangle = \sum_{i=-1}^2 f(i)g(i)$.)