MAT122 – Álgebra Linear – IF
Lista de Exercícios 6 – 20/05/2022

Prof. Claudio Gorodski

`Depositar no Google Classroom até 26/05, às 17h, impreterivelmente, as resoluções dos exercícios marcados com *.`

1. Suponha que V e W têm dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Mostre que para todas bases de V e W, a matriz de T em relação a essas bases tem pelo menos k coeficientes não-nulos, onde $k = \dim \operatorname{im} T$.

2. Decidir se é verdadeiro ou falso e justificar:

   a. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$ são invertíveis, então $ST \in \mathcal{L}(U, W)$ também é invertível e $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

   b. Se $V \neq \{0\}$ então o conjunto de operadores lineares invertíveis $T \in \mathcal{L}(V)$ forma um subespaço de $\mathcal{L}(V)$.

   c. Se $\dim V < \infty$ e S, $T \in \mathcal{L}(V)$, e $ST = I$ então $TS = I$.

   d. Para todo espaço vetorial V sobre $\mathbb{F}$ de dimensão finita, os espaços vetoriais V e $\mathcal{L}(\mathbb{F}, V)$ são isomorfos.

3. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$.

   a. Mostre que $\langle u + v, u - v\rangle = ||u||^2 - ||v||^2$ para todos u, $v \in V$.

   b. Mostre que se u e v têm a mesma norma, então $u + v \perp u - v$.

   c. Mostre que as diagonais de um losângo são perpendiculares entre si.

4. Determinar vetxores u, $v \in \mathbb{R}^2$ tais que u é um múltiplo de $(1, 3)$, v é ortogonal a $(1, 3)$ e $(1, 2) = u + v$.

5. Mostre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} j a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j^2}{j}\right)$$

para todos $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$.

*6. Sendo u, $v \in V$ com $||u|| = 3$, $||u + v|| = 4$, $||u - v|| = 6$, calcular $||v||$.