MAT122 – Álgebra Linear
Respostas da Lista de Exercícios 2, Parte 1

1. Apenas (a), (d), (e), (f).

2. im A consiste dos múltiplos de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\ker A$ consiste dos múltiplos de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. im B é nula e $\ker B$ consiste de todo $\mathbf{R}^3$.

3. Um subespaço que contém todas as matrizes simétricas e todas as matrizes triangulares inferiores deve conter também todas as somas de uma matriz simétrica e uma matriz triangular inferior. Mas toda matriz 3 por 3 A pode ser decomposta em tal soma, pois

$$A = B + (A - B)$$

onde $B = A_{sup} + (A_{sup})^t$ e A_{sup} é a matriz triangular superior cujos termos não-nulos (ou seja, aqueles na diagonal ou acima dela) coincidem com A. Note que B é simétrica e $A - B$ é triangular inferior. Explicitamente temos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 2a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} - a_{12} & -a_{22} & 0 \\ a_{31} - a_{13} & a_{32} - a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}.$$

Logo o menor subespaço que contém todas as matrizes simétricas e todas as matrizes triangulares inferiores é todo o espaço de matrizes 3 por 3.
O maior subsespaço que está contido em ambos esses subespaços é a intersecção desses subespaços que consiste das matrizes diagonais.

4. P_0 é o plano $x + 2y + z = 0$. P_0 é um subespaço, mas não P (pois não contém a origem.)

5. Apenas (a), (c).

6. A matriz nula não é ortogonal, pois não é invertível.

7. Temos que

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A solução geral de $Ax = 0$ é $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $\alpha \in \mathbf{R}$. $Ax = b$ admite soluções se e somente se b é múltiplo de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, ou ainda $b_1 = b_4 = 0$ e $b_3 - 4b_2 = 0$.
A solução geral de $Ax = b$ é $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $\alpha \in \mathbf{R}$.