

MAT122 e MAT2116 – Álgebra Linear
Lista de Exercícios 8 – 17/05/2008

PROF. CLAUDIO GORODSKI

1. Resolver a equação diferencial $\frac{du}{dt} = Au$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.
2. Calcular o posto e os autovalores das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Escolha a terceira linha da matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \end{pmatrix}$ de modo que seu polinômio característico seja $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$.
4. Fatore a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ na forma $S\Lambda S^{-1}$.
5. Calcule *todos* os auto-valores e auto-vetores da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e exiba duas matrizes diagonalizadoras diferentes S .
6. Calcule A^{100} onde $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Suponha que os auto-valores de A são 1, 1 e 2. Decida a veracidade das afirmações seguintes (se verdadeiro, justifique; se falso, dê uma contra-exemplo):
 - a. A é invertível.
 - b. A é diagonalizável.
 - c. A não é diagonalizável.

8. Exiba uma matriz cujos auto-valores sejam 1 e 4 e cujos auto-vetores sejam $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. Se $A^2 = I$, quais são os possíveis auto-valores de A ?

10. Suponha que as populações de coelhos c e de lobos l são governadas pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= 4c - 2l, \\ \frac{dl}{dt} &= c + l. \end{aligned}$$

- a. Se, inicialmente, $c = 300$ e $l = 200$, quais são as populações no instante t ?
- b. Depois de muito tempo, qual é a proporção de coelhos para lobos?

11. Decida a veracidade das seguintes afirmações:
- a. Uma matriz com todos os auto-valores mutuamente distintos é diagonalizável.
 - b. Uma matriz diagonalizável tem todos os auto-valores mutuamente distintos.
 - c. Se A e B são diagonalizáveis, então AB também é.
 - d. Se uma matriz triangular é conjugada a uma matriz diagonal, então ela já é diagonal.
 - e. Se A ou B é invertível, então AB é conjugada a BA .
 - f. Toda matriz invertível é diagonalizável.
 - g. Toda matriz diagonalizável é invertível.
 - h. Ao permutar duas linhas de uma matriz, trocamos o sinal de seus auto-valores.
12. Se A tem auto-valores 0, 1, 2, quais são os auto-valores de $A(A - I)(A - 2I)$?
13. Exiba matrizes 2 por 2 A e B tais que os auto-valores de AB *não* são os produtos dos auto-valores de A e B , e os auto-valores de $A + B$ *não* são as somas dos auto-valores de A e B .
14. Prove que A e A^t têm os mesmos auto-valores.
15. Diagonalize a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e calcule uma matriz R tal que $R^2 = A$; R é chamada de uma raiz quadrada de A ; quantas raízes quadradas de A há?