8.a aula: 10abr (resumo)

8.1 Sejam $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ vetores LI. Então o volume do paralelepípedo determinado por esses vetores é a área de uma base multiplicado pela altura correspondente. Por exemplo, o paralelogramo determinado por $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tem área $||\vec{x}\times\vec{y}||$. A altura correpondente a essa base é o módulo da projeção ortogonal de $\vec{z}$ sobre a reta determinada por $\vec{x} \times y$, ou seja,

$$|\cos\theta| \cdot ||\vec{z}||,$$

onde $\theta = \angle(\vec{z}, \vec{x} \times \vec{y})$. Usando que

$$\cos\theta = \frac{\vec{z} \cdot \vec{x} \times \vec{y}}{||\vec{z}|| \cdot ||\vec{x} \times \vec{y}||},$$

obtemos que a altura é

$$\frac{|\vec{z} \cdot \vec{x} \times \vec{y}|}{||\vec{x} \times \vec{y}||},$$

Logo o volume do paralelepípedo é

$$|\vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z}|.$$

8.2 Sejam $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ vetores LI. Então o volume do tetraedro determinado por esses vetores é

$$\frac{1}{6}|\vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z}|.$$

8.3 Se $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ em relação a uma base ortonormal positiva, então

$$\vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Além disso, o determinante é não-nulo se e somente se a tripla forma uma base, em cujo caso ela é positiva se e somente se o determinante é positivo.

Ex. 8.1 Sejam A, B, C pontos não colineares e seja π o plano determinado por esses pontos. Exprima a distância de um ponto X a π em função de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AX}$.