7.a aula: 8abr (resumo)

7.1 Vamos chamar de bases positivas de $\mathbb{V}^3$ aquelas que respeitam a regra da mão direita. O *produto vetorial* de dois vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ é o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ especificado da seguinte forma:

- $||\vec{u} \times \vec{v}||$ é a área de um paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Em particular, isso inclui o caso em que $\vec{u}$, $\vec{v}$ são LD, quando $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.
- Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ são LI, então a direção de $\vec{u} \times \vec{v}$ é a direção ortogonal a ambos $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ são LI, então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ formam uma base de $\mathbb{V}^3$. O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é aquele que faz com que essa base seja positiva.

7.2 A área de um paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser calculada pelo produto da base com a altura e dá

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \sin\theta,$$

onde $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

7.3 (i) Se $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ é uma base positiva, então $(\vec{y}, \vec{x}, -\vec{z})$ também é uma base positiva. Daqui deduzimos que $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$.

(ii) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ para todo $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$.

(iii) Se $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ 'e um base ortonormal positiva, então $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ e $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

7.4 Se E é uma base ortonormal positiva e $(\vec{x})_E = (x_1\ x_2\ x_3)$, $(\vec{y})_E = (y_1\ y_2\ y_3)$, defina $\vec{z}$ através de suas coordenadas

$$(\vec{z})_E = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right). \tag{1}$$

Pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} ||\vec{z}||^2 &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3)^2 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ &= ||\vec{x}||^2||\vec{y}||^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \\ &= ||\vec{x} \times \vec{y}||^2. \end{aligned}$$

Além disso calcula-se que $\vec{z} \cdot \vec{x} = \vec{z} \cdot \vec{y} = 0$. No caso em $\vec{x}, \vec{y}$ é LI, temos que $F = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ é uma base e $\det M_E^F = ||\vec{x} \times \vec{y}||^2 > 0$. Então $\vec{z}$ satisfaz todas as condições que definem o produto vetorial de $\vec{x}$ e $\vec{y}$, e portanto, $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$.

7.5 Da fórmula (1) vemos que:

1. $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=\vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}$.
2. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$.
3. $(\alpha\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\times\vec{v})$.

Ex. 7.1 Dado que $\angle(\vec{u},\vec{v})=\pi/6$, $||\vec{u}||=2$, $||\vec{v}||=3$, calcular $||\vec{u}\times\vec{v}||$.

Ex. 7.2 Calcular a área do triângulo ABC onde $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$ e $\overrightarrow{AC}=(0,1,3)$ (coordenadas em relação a uma base o.n.p.).

Ex. 7.3 Demonstrar que se $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ e $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ então $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$.

Ex. 7.4 O lado do quadrado $ABCD$ mede 2, AC é a diagonal e M é o ponto médio de BC. Calcular $||\overrightarrow{DM}\times\overrightarrow{DB}||$.

Ex. 7.5 Demonstrar que dado um vetor unitário $\vec{n}$, qualquer vetor $\vec{a}$ pode ser decomposto na forma

$$\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{n})\vec{n}+\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n}).$$