6.a aula: 1abr (resumo)

6.1 Seja $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$. O *módulo* $||\vec{v}||$ (*norma* ou *comprimento*) de $\vec{v}$ é a medida de qualquer segmento (orientado) que representa $\vec{v}$: Se $\vec{v} = \vec{AB}$ então

$$||\vec{v}|| = \mathrm{med}(AB).$$

Esta definição independe do segumento representante escolhido. Suponhamos agora que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não-nulos. Escolhemos uma origem O e representamos $\vec{u} = \vec{OU}$, $\vec{v} = \vec{OV}$. O *produto escalar* de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é o escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathrm{med}(OU) \cdot \mathrm{med}(OV) \cdot \cos(\mathrm{med}(\angle(UOV)));$$

e se pelo menos um dentre eles fôr o vetor nulo, pomos $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Novamente, a definição independe dos representantes escolhidos. Em particular,

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

para todo $\vec{v}$, e

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| ||\vec{v}||}$$

se $\vec{u}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$.

8.2 A motivação por trás da definição de produto esclara é a lei dos cossenos. De fato, se ABC é um triângulo com $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e o ângulo ABC mede $\pi - \theta$, portanto essa lei diz que

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cos(\pi - \theta),$$

ou seja,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2). \tag{1}$$

8.3 Para todos $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ valem:

1. $||\alpha\vec{v}|| = |\alpha| ||\vec{v}||$
2. $||\vec{v}|| \geq 0$; e $||\vec{v}|| = 0$ se e somente se $\vec{v} = \vec{0}$.
3. $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$

8.4 Para todos $\vec{u}$, $\vec{v}$, $w \in \mathbb{V}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ valem:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (simetria)
2. $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$ (homogeneidade de grau 1)
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ e $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$ (distributividade)

(2) e (3) também expressam a *bilinearidade* do produto escalar.

8.5 Temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{se e somente se } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são ortogonais.}$$

Uma *base ortonormal* de $\mathbb{V}^3$ é uma base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tal que seus elementos são unitários,

$$||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1,$$

e ortogonais dois a dois,

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

Numa base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, se $\vec{x} = x_1\vec{i} + y_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, então, pelo Teorema de Pitágoras,

$$||\vec{x}||^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Tomando $\vec{y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$ e substituindo em (1), obtemos

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

8.6 Teorema. *Se o circuncentro O de um triangulo ABC dado é escolhido como origem, então o vetor posição de seu ortocentro é igual à soma dos vetores posição de seus vértices.*

Dem. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ os vetores posição dos vértices A, B, C. O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, portanto é equidistante dos vértices. Assim $||\vec{a}|| = ||\vec{b}|| = ||\vec{c}||$. Seja H o ponto do plano determinado por A, B, C tal que $\overrightarrow{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Calculamos

$$\vec{CH} \cdot \vec{AB} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = -||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 = 0,$$

mostrando que as retas CH e AB são perpendiculares. Assim, H pertence à altura baixada de C sobre AB. Analogamente, mostramos que H pertence às outras alturas do triângulo. Logo, H é o ortocentro (centro da circunferência *inscrita* no triângulo). $\square$

8.7 Corolários. As alturas de um triângulo são concorrentes. Em qualquer triângulo, o circuncentro O, o baricentro G, e o ortocentro H são colineares. De fato, $\vec{O}G = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}\vec{O}H$. Assim, O, H, G coincidem se e somente se dois deles coincidem, e, caso contrário, a reta por eles é chamada de *reta de Euler.*

Ex. 8.1 Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de aresta a, calcular $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$.

Ex. 8.2 Seja E uma base ortonormal de $\mathbb{V}^3$. Obter um vetor unitário $\vec{u}$ e ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, onde $(\vec{v})_E = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $(\vec{w})_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ex. 8.3 Demonstre que as diagonais de um paralelogramo são ortogonais se e somente ele é um losango.

Ex. 8.4 Suponha que a soma de três vetores de mesmo comprimento é nula. Demonstre que o ângulo formado entre dois quaisquer deles é 120^o.