4.a aula: 25mar (resumo)

4.1 Lembremos que uma tripla ordenada de vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ que é L.I. é chamada de uma *base* de $\mathbb{V}^3$. A propriedade fundamental de uma tal base é que qualquer vetor $\vec{v} \in \mathbb{E}^3$ dado pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base, de maneira única, isto é, existem únicos x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

Os escalares x_1, x_3, x_3 são chamados de coordenadas de $\vec{v}$ na base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e denotamos

$$(\vec{v})_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

4.2 Fixada uma base E, podemos operar com os vetores calculando diretamente com as coordenadas. Por exemplo,

$$(\alpha\vec{u} + \vec{v})_E = \alpha(\vec{u})_E + (\vec{v})_E.$$

4.3 Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ bases de $\mathbb{V}^3$. Usando a propriedade fundamental das bases, podemos escrever

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\vec{e}_i \tag{1}$$

para únicos escalares a_{ij}. Chamamos a matriz

$$M_E^F = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

de *matriz de mudança de base de F para E.*

4.4 Continuemos com a notação de (4.3) e suponhamos que

$$(\vec{v})_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ (\vec{v})_F = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Então

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i \tag{2}$$

e

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} y_j\vec{f}_j. \tag{3}$$

Substituindo (1) em (3), simplificando e comparando com (2), obtemos

$$x_i = \sum_{j=1} a_{ij} y_j.$$

Isto mostra que

$$(\vec{v})_E = M_E^F (\vec{v})_F.$$

4.5 Mantemos a notação de (4.3) e (4.4). Seja $G = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ uma terceira base de $\mathbb{V}^3$. Sejam $M_E^G = (c_{ij})$, $M_E^F = (a_{ij})$ e $M_F^G = (b_{ij})$. Então calculamos que

$$M_E^F M_F^G = M_E^G.$$

Em particular, fazendo $G = E$, vem que

$$M_E^F M_F^E = M_E^E = I \text{ (matriz identidade)},$$

ou seja, M_E^F sempre é invertível e

$$(M_E^F)^{-1} = M_F^E.$$

Lembremos que uma matriz é invertível se e somente se seu determinante é não-nulo.

4.6 Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de $\mathbb{V}^3$. Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{V}^3$, escrevamos

$$(\vec{u})_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ (\vec{v})_E = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \ (\vec{w})_E = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Vale o seguinte critério: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ é L.I. se e somente se

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ex. 4.1 Seja $ABCD$ um tetraedro. (i) Verificar que $E = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ e $F = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ são bases de $\mathbb{V}^3$. (ii) Determinar as matrizes de mudança de base M_E^F e M_F^E. (iii) Verificar diretamente que $M_E^F M_F^E = I$.

Ex. 4.2 Sejam E, F, G bases de $\mathbb{V}^3$. Verificar que se $M_E^F = M_E^G$ então $F = G$.