3.a aula: 18mar (resumo)

3.1 Dados vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{V}^3$, uma *relação linear* entre esses vetores é uma combinação linear que produz o vetor nulo:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0},$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são escalares nem todos nulos.

3.2 Os vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{V}^3$ são ditos *linearmente independentes* (L.I., para abreviar) se não existe relação linear entre eles. Caso contrário, eles são ditos *linearmente dependentes* (L.D.).

3.3 ($n = 2$) Suponhamos que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ são LD. Então

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{0}$$

onde algum escalar não é nulo, digamos, $\alpha_2 \neq 0$. Então

$$\vec{v}_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{v}_1.$$

Tomemos $P \in \mathbb{E}^3$ e suponhamos que $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$. Consideremos a reta

$$r : X = P + \lambda\vec{v}_1 \ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Então

$$Q = P + \vec{v}_2 = P + \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\vec{v}_1$$

satisfaz a equação de r com $\lambda = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, logo $Q \in r$. Isso mostra que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos à reta r. No caso $\vec{v}_1 = \vec{0}$, da relação linear vem que $\vec{v}_2 = \vec{0}$ e os dois vetores também são paralelos a uma reta. Reciprocamente, se dois vetores são paralelos a uma reta então, invertendo o argumento acima, verifica-se que eles são vetores LD.

3.4 ($n = 2$) Suponhamos que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ são LI. Seja $P \in \mathbb{E}^3$. De (3.3) vem que as retas

$$r : X = P + \lambda\vec{v}_1 \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

e

$$s : Y = P + \mu\vec{v}_2 \ (\mu \in \mathbb{R})$$

são distintas e concorrentes em P. O plano π que contém r e s tem equação

$$\pi : Z = P + \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2(\lambda,\, \mu \in \mathbb{R}).$$

3.5 ($n = 3$) Suponhamos que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ são LD. Então

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$$

onde algum escalar não é nulo, digamos, $\alpha_3 \neq 0$. Então

$$\vec{v}_3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\vec{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\vec{v}_2.$$

Fixemos $P \in \mathbb{E}^3$. No caso em que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ são LI, existe um único plano π por P e paralelo a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. No caso em que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ são LD, existem muitos planos por P e paralelos a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, seja π um deles. Em qualquer caso,

$$P + \vec{v}_3 = P - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\vec{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\vec{v}_2$$

também é um ponto do plano π, o que mostra que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ são todos paralelos a π. Reciprocamente, se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ são paralelos a um plano, então são LD.

3.6 ($n = 3$) Suponhamos que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ são LI. Seja $P \in \mathbb{E}^3$. De (3.5) vem que as retas

$$r : X = P + \lambda\vec{v}_1 \ (\lambda \in \mathbb{R}),$$

$$s : Y = P + \mu\vec{v}_2 \ (\mu \in \mathbb{R})$$

e

$$t : Z = P + \nu\vec{v}_3 \ (\nu \in \mathbb{R})$$

são distintas, concorrentes em P e não-coplanares. Dado $X \in \mathbb{E}^3$, o plano por X e paralelo a r, s corta a reta t num ponto C da forma $C = P + \nu\vec{v}_3$. Analogamente, o plano por X e paralelo a s, t corta a reta r num ponto A da forma $A = P + \lambda\vec{v}_1$, e o plano por X e paralelo a r, t corta a reta s num ponto B da forma $B = P + \mu\vec{v}_2$. Os pontos P, A, B, C determinam um paralelepípedo que também tem X como vértice. Agora

$$\begin{aligned} X &= P + \overrightarrow{PX} \\ &= P + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \\ &= P + \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 + \nu\vec{v}_3, \end{aligned}$$

Lembremos que $X \in \mathbb{E}^3$ é arbitrário e notemos que (λ, μ, ν) estão unicamente determinados. Podemos dizer que essas são as *coordenadas* do ponto X em relação ao sistema de coordenadas $(P, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

3.7 ($n = 4$) Quatro vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ são sempre LD. Pois fixando $P \in \mathbb{E}^3$, seja $Q = P + \vec{v}_4$. Então $\vec{v}_4 = Q - P = \overrightarrow{PQ}$. No caso em que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ são LI, por (3.6) podemos escrever

$$Q = P + \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 + \nu\vec{v}_3.$$

Daí segue que

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 + \nu\vec{v}_3 + (-1)\vec{v}_4 = \vec{0},$$

ou seja, os quatro vetores são LD. No caso em que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$s são LD o resultado também segue (vide obs. 3 abaixo).

3.8 *Observações finais.* 1. Se uma lista de vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ contém o vetor nulo, digamos $\vec{v}_1 = \vec{0}$, então ela é LD. De fato

$$1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$$

é uma relação linear entre eles.

2. Um vetor $\vec{v}_1$ é LD se e somente se ele é nulo. De fato, se $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ e $\alpha_1\vec{v}_1 = \vec{0}$ é uma relação, então $\alpha_1 = 0$ e não existe a relação. Por outro lado, se $\vec{v}_1 = \vec{0}$ ent]ao ele é LD pela obs. 1.

3. Se $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ são LD e adicionamos vetores para ter $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}, \ldots, \vec{v}_m$ com $m > n$, então a lista maior também é LD, pois qualquer relação

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0},$$

pode ser estendida a

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n + 0\vec{v}_{n+1} + \cdots + 0\vec{v}_m = \vec{0}.$$

4. Da mesma forma, se $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ são LI e subtraímos vetores desta lista, ela permanece LI.

Ex. 3.1 Escrever a equação do plano determinado por três pontos A, B, C não-colineares.

Ex. 3.2 Verificar que o segmento unindo os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo à base do trapézio.

Ex. 3.3 Verificar que se $\vec{u}$, $\vec{v}$ são LI então $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ também são LI.