2.a aula: 11mar (resumo)

2.1 Dados vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{V}^3$, uma *combinação linear* desses vetores é um vetor da forma

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n,$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são escalares.

2.2 Dados pontos $A_1, \ldots, A_p \in \mathbb{E}^3$ e números reais $m_1, \ldots, m_p$ (as "massas") tais que $m := m_1 + \cdots + m_p \neq 0$, o *centro de massa* desses pontos sujeitos a essas massas é o ponto

$$G = O + \frac{m_1}{m}\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \frac{m_p}{m}\overrightarrow{OA_p},$$

onde $O \in \mathbb{E}^3$. Esta equação é equivalente a

$$m\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OA_1} + \cdots + m_p\overrightarrow{OA_p}.$$

Além disso, essa definição independe da escolha de O e assim define um único ponto. Também G fica inalterado ao multiplicarmos todas as massas por uma constante não-nula, de modo que podemos assumir que a massa total $m = 1$, o que faremos em seguida.

2.3 ($p = 2$) Aqui $A_1 \neq A_2$ e

$$G = O + m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2}. \tag{1}$$

O ponto médio de A_1 e A_2 é o centro de massa com $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$. De fato, basta tomar $O = A_1$ em (1) para obter

$$G = A_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2}.$$

Por outro lado, o conjunto de todos os centros de massa para todos os valores de m_1, m_2 com $m_1 + m_2 = 1$ dá a reta definida por A_1 e A_2; a condição $m_2 \geq 0$ em (1) dá a semi-reta A_1A_2; a condição $m_1 \geq 0$ dá a semi-reta A_2A_1; e a condição m_1, $m_2 \geq 0$ dá o segmento A_1A_2.

2.4 Continuando com a notação de 2.3, subsituamos $m_1 = 1 - m_2$ em (1). Então

$$G = A_1 + m_2\overrightarrow{A_1A_2}.$$

Trocando a notação para $X = G$, $A_1 = P$, $m_2 = \lambda$, e $\vec{A_1}A_2 = \vec{v}$, temos a *equação paramétrica da reta* (também chamada de equação vetorial em alguns livros):

$$r : X = P + \lambda\vec{v} \ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

A reta r fica determinada por um ponto P e um vetor diretor $\vec{v}$. X é um ponto arbitrário de r e λ é um parâmetro real. Pensando em λ como sendo o tempo, essa parametrização descreve o movimento retilíneo uniforme da cinemática, onde P é a posição inicial e $\vec{v}$ é a velocidade (constante).

2.5 ($p = 3$) Dados A_1, A_2, $A_3 \in \mathbb{E}^3$, eles são vértices de um triângulo. O centro de massa com massas iguais é por definição o baricentro do triângulo. Massas não-negativas (resp. positivas) correspondem aos pontos do (resp. interior do) triângulo. $m_3 = 0$ corresponde ao lado A_1A_2 do triângulo.

2.6 ($p = 4$) Dados A_1, A_2, A_3, $A_4 \in \mathbb{E}^3$, eles são vértices de um tetraedro. O centro de massa com massas iguais é por definição o baricentro do tetraedro. Massas não-negativas (resp. positivas) correspondem aos pontos do (resp. interior do) tetraedro. $m_4 = 0$ corresponde à face $A_1A_2A_3$ do tetraedro. $m_3 = m_4 = 0$ corresponde à aresta A_1A_2 do tetraedro.

Ex. 2.1 Verificar que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são vértices de um paralelogramo.

Ex. 2.2 Verificar que as medianas de um triângulo encontram-se no baricentro do triângulo.

Ex. 2.3 Seja dado um tetraedro. (i) Verificar que retas por um vértice e o baricentro da face oposta encontram-se no baricentro do tetraedro. (ii) Verificar que as retas pelos pontos médios de arestas opostas encontram-se no baricentro do tetraedro.