1.a aula: 6mar (resumo)

1.1 Seja $\mathbb{E}^3$ o espaço Euclideano. Seus elementos são chamados de *pontos*.

1.2. Um *vetor* $\vec{v}$ fica definido por um par ordenado (P, Q) onde P e Q são pontos de $\mathbb{E}^3$. Dois pares (P, Q) e (P', Q') definem o mesmo vetor se existe um paralelogramo $PQQ'P'$. Note que pode acontecer de os pontos P, Q, P' Q' serem colineares e mesmo assim (P, Q) e (P', Q') definirem o mesmo vetor: baste que existam P'' e Q'' em $\mathbb{E}^3$ tais que $PQQ''P''$ e $P''Q''Q'P'$ sejam paralelogramos. O vetor $\vec{v} = (P, Q)$ também, será denotado por $\vec{PQ}$, e 0 espaço de todos os vetores será denotado por $\mathbb{V}^3$.

1.3. *Adição de vetores.* Dados vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, representamos $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{BC}$. Então a soma $\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor representado ppr $\vec{AC}$. Em outras palavras, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

1.4. *Propriedades da adição de vetores.*

(A1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associatividade)

(A2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ (existência de elemento neutro)

(A3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$ (existência de elemento inverso; $-\vec{u}$ é o *oposto* de $\vec{u}$).

(A4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutatividade)

1.5 Podemos pensar em vetores de $\mathbb{V}^3$ como translações do espaço $\mathbb{E}^3$ de pontos. De fato, dado seja $\vec{v} \in \mathbb{V}$ um vetor. Para todo $P \in \mathbb{E}^3$ existe $Q \in \mathbb{E}^3$ tal que $\vec{v} = \vec{PQ}$. Escrevemos

$$P + \vec{v} = Q.$$

Isso define a soma de um ponto com um vetor como sendo um ponto. Em função disso, também denotamos um vetor $\vec{PQ}$ por $Q - P$.

1.6 *Propriedades da adição de um ponto e um vetor.*

(B1) $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v})$

(B2) $P + \vec{0} = P$

(B3) Dados P, $Q \in \mathbb{E}^3$, existe um único $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$ tal que $P + \vec{v} = Q$.

1.7 *Multiplicação de um vetor por um escalar.* Dados um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, representamos $\vec{v} = \vec{AB}$. Então $\alpha\vec{v}$ é o vetor representado por $\vec{AC}$, onde a medida $\text{med}(\overline{AC}) = |\alpha|\text{med}(\overline{AB})$, e C pertence à semi-reta definida por AB se $\alpha \geq 0$, e C pertence à semi-reta oposta se $\alpha < 0$. Note que $0\vec{v} = \vec{0}$.

1.8 *Propriedades da multiplicação de um vetor por um escalar.*

(C1) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u})$ (associatividade)

(C2) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} = \vec{u}$ (distributividade de escalares)

(C3) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ (distributividade de vetores)

(C4) $1\vec{u} = \vec{u}$ (existência de elemento neutro)

Ex. 1.1 Verificar que se $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ então $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

Ex. 1.2 Verificar que $(-\alpha)\vec{v} = \alpha(-\vec{v}) = -(\alpha\vec{v})$ e que $(-\alpha)(-\vec{v}) = \alpha\vec{v}$.