Cálculo III - Poli - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio

Departamento de Matemática
IME - USP

11 de março de 2020

Integrais Triplas

Definição (Paralelepípedos)

Um *paralelepípedo* ou *itervalo tridimensional* é um produto $I_1 \times I_2 \times I_3$, onde $I_1, I_2, I_3 \subset \mathbb{R}$ são intervalos.

Definição (Partições e Pontilhamentos)

Seja $R = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset \mathbb{R}^3$ um paralelepípedo compacto.

- Uma *partição* de R é um produto $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ onde P_j é uma partição de I_j para $1 \leq j \leq 3$.
- Um *pontilhamento* da partição $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ é um produto $\xi = \xi_1 \times \xi_2 \times \xi_3$ onde ξ_j é pontilhamento de P_j para $1 \leq j \leq 3$.

Partições e Pontilhamentos (cont.)

Definição (Partições e Pontilhamentos)

- Os *paralelepípedos* ou *subintervalos* da partição P são os produtos da forma $J_1 \times J_2 \times J_3$, onde J_k é um intervalo da partição P_k, para $1 \leq k \leq 3$.
- Denotamos por $\mathcal{S}(P)$ o conjunto dos subintervalos da partição P. Dado ξ pontilhamento de P, para cada $Q \in \mathcal{S}(P)$ existe um único elemento de ξ que pertence a Q, o qual denotaremos por ξ_Q.
- A *norma* da partição P é $|P| := \max\{|P_1|, |P_2|, |P_3|\}$.

Definição (Integrabilidade no sentido de Riemann)

Sejam $R \subset \mathbb{R}^3$ um paralelepípedo compacto e $f : R \to \mathbb{R}$.

- Dados P partição de R e ξ pontilhamento de P, a *soma de Riemann* de f com respeito a (P, ξ) é

$$S(f, P, \xi) := \sum_{Q \in \mathcal{S}(P)} f(\xi_Q)\, m(Q),$$

  onde $m(Q)$ denota o volume do paralelepípedo Q.

- f diz-se *Riemann-integrável* se existir o limite das somas de Riemann de f, i.e. se a seguinte condição for satisfeita:

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \text{ partição de } R \text{ com } |P| < \delta,$$
$$\forall \xi \text{ pontilhamento de } P, \quad \left| S(f, P, \xi) - \ell \right| < \epsilon.$$

  Caso afirmativo, diz-se que ℓ é limite das somas de Riemann de f.

Proposição

O limite das somas de Riemann de $f : R \to \mathbb{R}$, caso exista, é único.

Definição (Integral de Riemann)

Se $f : R \to \mathbb{R}$ for Riemann-integrável, chamamos o limite das suas somas de Riemann de *integral de Riemann* de f.

Notação

- $\iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}V(x, y, z)$ ou $\iiint_R f\,\mathrm{d}V$ ou $\iiint_R f$;
- $\int_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}V(x, y, z)$ ou $\int_R f\,\mathrm{d}V$ ou $\int_R f$.

Observação

- Também podemos definir as integrais triplas usando somas superiores e somas inferiores.
- Valem as mesmas propriedades enunciadas para integrais duplas.

Teorema de Fubini

Teorema (Fubini)

Sejam $R = \prod_{i=1}^{3}[a_i, b_i]$ um paralelepípedo compacto e $f : R \to \mathbb{R}$ integrável. Denotemos por Q o retângulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$. Então

$$\int_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}V(x,y,z) = \int_Q \Big[\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\Big]\,\mathrm{d}A(x,y) =$$

$$= \int_{a_3}^{b_3} \Big[\int_Q f(x,y,z)\,\mathrm{d}A(x,y)\Big]\,\mathrm{d}z,$$

desde que as integrais iteradas existam.
Valem afirmações análogas para as integrais iteradas obtidas trocando-se o papel das variáveis x, y, z.

Conjuntos de Medida Nula

Definição (Conjuntos de Medida Nula)

Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^3$ é um *conjunto de medida nula* se, para todo $\epsilon > 0$, existir uma coleção enumerável de paralelepípedos $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $A \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) < \epsilon$, onde $m(Q_i)$ denota o volume do paralelepípedo Q_i.

Observação

- É equivalente, na definição acima, usar bolas no lugar de paralelepípedos.
- Conjuntos de *conteúdo* nulo: mesma definição com “finita” no lugar de “enumerável”.

Condição Necessária e Suficiente para Integrabilidade

Teorema (critério de Lebesgue)

Sejam $R \subset \mathbb{R}^3$ um retângulo compacto e $f : R \to \mathbb{R}$ limitada. Então f é integrável se, e somente se, o conjunto $D_f \subset R$ dos pontos de descontinuidade de f tiver medida nula.

Algumas Propriedades dos Conjuntos de Medida Nula

1. Conjuntos enumeráveis têm medida nula.
2. A união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.
3. Um subconjunto de um conjunto de medida nula tem medida nula.
4. A imagem de um conjunto de medida nula por movimentos rígidos é um conjunto de medida nula.
5. Planos têm medida nula.
6. O gráfico de uma função contínua $[a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ tem medida nula.
7. Se $k < 3$, imagens de aplicações $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^3$ classe C^1 têm medida nula.

Algumas Propriedades dos Conjuntos de Medida Nula

Interpretação Geométrica

Um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ tem medida nula se, intuitivamente, for um conjunto de “volume” nulo.

Integrabilidade sobre Conjuntos Limitados

Notação

Seja f uma função definida num subconjunto A de $\mathbb{R}^3$. Denotamos por $\widetilde{f}$ a extensão por 0 de f, i.e. a função $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\widetilde{f}(x) = f(x)$ se $x \in A$ e 0 caso contrário.

Definição (Integrabilidade sobre Conjuntos Limitados)

Sejam $A \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto limitado e $f : A \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é integrável em A se $\widetilde{f}$ for integrável em algum paralelepípedo compacto Q que contenha A. Caso afirmativo, definimos

$$\int_A f := \int_Q \widetilde{f}.$$

Integrabilidade sobre Conjuntos Limitados

Observação

- A condição que intervém na definição acima é independente da escolha do retângulo Q contendo A.
- Em vista do critério de Lebesgue, f limitada é integrável se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade da extensão $\widetilde{f}$ tiver medida nula.
- Em particular, se $f : A \to \mathbb{R}$ for limitada, ∂A tiver medida nula e o conjunto D_f dos pontos de descontinuidade de f tiver medida nula, então f é integrável.

Interpretação Geométrica

Interpretação Geométrica

Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ limitado com fronteira de medida nula.

- $\int_A 1 \,\mathrm{d}V$ é o *volume* de A.
- Se $f : A \to \mathbb{R}$ for ≥ 0 e integrável, podemos interpretar $\int_A f \,\mathrm{d}V$, por exemplo, como a massa de um objeto que ocupa a região A do espaço tridimensional com densidade dada por f.

Exemplos

Exemplo

Sejam $Q \subset \mathbb{R}^2$ um retângulo compacto, $g, h : Q \to \mathbb{R}$ contínuas com $g \leq h$ e $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in Q, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$. Então A é limitado e ∂A tem medida nula. Tomando $R = Q \times [a, b]$ contendo A, se $f : A \to \mathbb{R}$ for descontínua num conjunto enumerável, então f é Riemann integrável e

$$\int_A f = \int_R \widetilde{f} \overset{Fubini}{=} \int_Q \int_c^d \widetilde{f}(x, y, z)\,\mathrm{d}z\;\mathrm{d}A(x, y) =$$

$$= \int_Q \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\;\mathrm{d}A(x, y).$$

Exemplos

Exemplo

Mesmo exemplo anterior, substituindo-se o retângulo compacto por $Q = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, onde $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas com $\alpha \leq \beta$. Obtém-se:

$$\int_A f = \int_Q \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\;\mathrm{d}A(x, y) =$$

$$= \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Teorema de Mudança de Variáveis

Teorema (TMV)

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ *aberto,* $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ *de classe* C^1 *injetiva,* $R \subset \mathcal{U}$ *e* $S = \varphi(R) \subset \mathbb{R}^3$*. Suponha que tanto* R *como* S *sejam limitados com fronteiras de medida nula e que* $f : S \to \mathbb{R}$ *seja contínua. Então*

$$\int_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}V(x,y,z) = \int_R f\big(\varphi(u,v,w)\big)\,|\mathrm{J}\varphi(u,v,w)|\,\mathrm{d}V(u,v,w).$$

Observação

A hipótese de que f seja contínua pode ser relaxada: basta que $f : S \to \mathbb{R}$ e $f \circ \varphi : R \to \mathbb{R}$ sejam ambas integráveis.